3.1 前提の確認

この章で認める前提の整理を行う。

- (高) 自然数・整数・有理数・無理数・実数・複素数とそれの四則演算
- 数の集合の略記
- 自然演繹
- 基本的な集合と演算
- 関係・写像

3.2 距離空間

3.2.1 ユークリッド空間

定義 3.2.1: $\mathbb{R}^n$ における距離

一般に、$\mathbb{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して、**距離**を

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

とし、$d^{(n)}(x, y)$ と表す。

定義 3.2.2: ユークリッド空間

集合 $\mathbb{R}^n$ に距離 $d^{(n)}$ を導入した集合を **n 次元ユークリッド空間**といい、$(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ または単に $\mathbb{R}^n$ と表す。
また、$\mathbb{R}^n$ の元を**点**、$d^{(n)}(x, y)$ を 2 点 x, y の**ユークリッド距離**という。

補題 3.2.3: シュワルツの不等式

任意の実数 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ に対して、

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

が成立する。

証明.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\sum_{i<j}\left({a_i}^2{b_i}^2+{a_j}^2{b_j}^2\right)$$
$$=\sum_{i<j}(a_i b_j-a_i b_j)^2\geq 0$$

■

定理 3.2.4: 三角不等式

$\mathbb{R}^n$ の 3 点 x, y, z に対して、

$$d^{(n)}(x,z)\leq d^{(n)}(x,y)+d^{(n)}(y,z)$$

が成立する。

証明.

$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ とする。

$a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$ とおく。$a_i+b_i=x_i-z_i$ であるから、

$$\left(d^{(n)}(x,z)\right)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2+2\sum_{i=1}^{n}a_i b_i$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2+2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right)}\quad(\because\text{「補題 3.2.3(シュワルツの不等式)」})$$
$$=\left(d^{(n)}(x,y)+d^{(n)}(y,z)\right)^2$$

■

定義 3.2.5: $\mathbb{R}^n$ の部分集合に関する用語

- $\mathbb{R}^n$ の点 a と正の実数 ε に対して、$\mathbb{R}^n$ の部分集合

  $$\{x\in\mathbb{R}^n\mid d^{(n)}(a,x)<\varepsilon\}$$

  を、a を**中心**とし ε を**半径**とする**開球体**といい、$B_n(a;\varepsilon)$ と表す。

  $$\{x\in\mathbb{R}^n|d^{(n)}(a,x)=\varepsilon\}$$

  を、a を中心とし ε を半径とする**球面**といい、$S_n(a;\varepsilon)$ と表す。
- M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。$\mathbb{R}^n$ の点 a が

  $$\exists\varepsilon>0\quad B_n(a;\varepsilon)\subseteq M$$

  を満たすとき、a を M の**内点**という。M の内点全体の集合を M の**内部**といい、M^i と表す。
- M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。$\mathbb{R}^n$ の点 a が

  $$\exists\varepsilon>0\quad B_n(a;\varepsilon)\cap M=\emptyset$$

を満たすとき、a を M の**外点**という。M の外点全体の集合を M の**外部**といい、M^e と表す。

- M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。$\mathbb{R}^n$ の点 a が内点でも外点でもないとき、a を M の**境界点**という。M の境界点全体の集合を M の**境界**といい、M^f と表す。
- M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。$\mathbb{R}^n$ の点 a が

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$$

を満たすとき、a を M の**触点**という。M の触点全体の集合を M の**閉包**といい、$\overline{M}$ または M^a と表す。

定理 3.2.6: $\mathbb{R}^n$ の部分集合に関する用語にまつわる定理

$\mathbb{R}^n$ の部分集合を M とする。次が成立する。

(1) $M^i \subseteq M$

(2) $\mathbb{R}^n$ の点 a が M^c の内点 $\leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ の点 a が M の外点

(3) $M^e = (M^c)^i$

(4) $M^e \subseteq M^c$

(5) $M^i \cap M^e = \emptyset$

(6) $M^f = M \backslash (M^i \cup M^e)$

(7) $M^f = (M^c)^f$

(8) $\mathbb{R}^n$ の点 a が境界点 $\leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \wedge B_n(a;\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset$ が成立すること

(9) $\mathbb{R}^n = M^i \oplus M^e \oplus M^f$

(10) $M \subseteq \overline{M} = M^a$

(11) $\overline{M} = M^a = (M^i \cup M^f)$

証明.

(1) $x \in M^i$ とする。

$\exists \varepsilon > 0 \quad B_n(x;\varepsilon) \subseteq M$ が成立する。

$x \in B_n(x;\varepsilon)$ より $x \in M$

$\therefore M^i \subseteq M$

(2) (i) $(\rightarrow)$ を示す。

$x \in (M^c)^i$ とする。

$\exists \varepsilon > 0 \quad B_n(x;\varepsilon) \subseteq M^c$ が成立し、ε_1 が $B_n(a;\varepsilon_1) \subseteq M^c$ を満たすようにとる。

$M^c \cap M = \emptyset \quad \rightarrow \quad B_n(x;\varepsilon_1) \cap M = \emptyset$

したがって、$\exists \varepsilon > 0 \quad B_n(a;\varepsilon) \cap M = \emptyset$

$\therefore x \in M^e$

(ii) $(\leftarrow)$ を示す。

$x \in M^e$ とする。

$\exists \varepsilon > 0 \;\; B_n(x;\varepsilon) \cap M = \emptyset$ が成立し、ε_2 が $B_n(x;\varepsilon_2) \cap M = \emptyset$ を満たすようにとる。

$$
\begin{aligned}
B_n(x;\varepsilon_2) \cap \mathbb{R}^n &= B_n(x;\varepsilon_2) \\
B_n(x;\varepsilon_2) \cap (M \cup M^c) &= B_n(x;\varepsilon_2) \\
(B_n(x;\varepsilon_2) \cap M) \cup (B_n(x;\varepsilon_2) \cap M^c) &= B_n(x;\varepsilon_2) \\
\emptyset \cup (B_n(x;\varepsilon_2) \cap M^c) &= B_n(x;\varepsilon_2) \\
B_n(x;\varepsilon_2) \cap M^c &= B_n(x;\varepsilon_2)
\end{aligned}
$$

したがって、$\exists \varepsilon > 0 \;\; B_n(x;\varepsilon) \subseteq M^c$

$\therefore x \in (M^c)^i$

(3) (2) より明らか。

(4) (1) より、$(M^c)^i \subseteq M^c$ が成立し、

(3) より、$M^e \subseteq M^c$

(5) $M^i \cap (M^c)^i \neq \emptyset$ と仮定し、x を $M^i \cap (M^c)^i$ の元とする。

$x \in M^i \;\wedge\; x \in (M^c)^i$

(1) より、$x \in M \;\wedge\; x \in M^c$ となり矛盾する。

したがって、$M^i \cap (M^c)^i = \emptyset$ が成立する。

(3) より、$M^i \cap M^e = \emptyset$

(6) 定義より明らか。

(7)

$$
\begin{aligned}
M^f &= \mathbb{R}^n \backslash (M^i \cup M^e) \\
&= \mathbb{R}^n \backslash (M^i \cup (M^c)^i) \\
&= \mathbb{R}^n \backslash ((M^c)^c)^i \cup (M^c)^i) \\
&= \mathbb{R}^n \backslash ((M^c)^e \cup (M^c)^i) \\
&= (M^c)^f
\end{aligned}
$$

(8) (i) $(\rightarrow)$ を背理法により示す。

$$
\begin{aligned}
&\neg \, (\forall \varepsilon > 0 \;\; B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \;\wedge\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset) \\
\leftrightarrow \;& \exists \varepsilon > 0 \;\; \neg \, (B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \;\wedge\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset) \\
\leftrightarrow \;& \exists \varepsilon > 0 \;\; B_n(a;\varepsilon) \cap M = \emptyset \;\vee\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c = \emptyset
\end{aligned}
$$

$\therefore a \in M \;\vee\; a \in M^c$ が成立し矛盾する。

(ii) $(\leftarrow)$ を背理法により示す。

$a \in M \;\vee\; a \in M^c$ とする。

$$
\begin{aligned}
&\exists \varepsilon > 0 \;\; B_n(a;\varepsilon) \cap M = \emptyset \;\vee\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c = \emptyset \\
\leftrightarrow \;& \exists \varepsilon > 0 \;\; \neg \, (B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \;\wedge\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset) \\
\leftrightarrow \;& \neg \, (\forall \varepsilon > 0 \;\; B_n(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \;\wedge\; B_n(a;\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset)
\end{aligned}
$$

となり、仮定に矛盾する。

(9) M^f の定義より、$M^f \cap (M^i \cup M^e) = \emptyset$

また、$\mathbb{R}^n = M^i \cup M^e \cup M^f$ が成立する。

(5) より $M^i \cap M^e = \emptyset$ である。

以上より、$\mathbb{R}^n = M^i \oplus M^e \oplus M^f$

(10) $x \in M$ とすると、明らかに $\forall \varepsilon > 0 \quad x \in B_n(x;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成立する。
$\therefore x \in \overline{M}$
故に、$M \subseteq \overline{M} = M^a$
(11) 定義より、明らかに $\overline{M} = (M^e)^c$ である ($\because$ 定義の論理式が A と $\neg A$ の関係)。
(9) より、$\overline{M} = (M^e)^c = (M^i \cup M^f)$

■

定義 3.2.7: 開集合と閉集合

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M について、

- $M = M^i$ となるとき、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の**開集合**という。
- $M = \overline{M}$ となるとき、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の**閉集合**という。

定理 3.2.8: 開集合・閉集合の性質

$\mathbb{R}^n$ の部分集合を M とする。次が成立する。
(1) M^i は開集合、つまり $(M^i)^i = M^i$
(2) M^a は閉集合、つまり $(M^a)^a = M^a$

証明.

(1) $(M^i)^i \subseteq M^i$ は明らかであるため、$M^i \subseteq (M^i)^i$ を示す。
$x \in M^i$ に対して、$\exists \varepsilon > 0 \quad B_n(x;\varepsilon) \subseteq M$ が成立する。$y \in B_n(x;\varepsilon)$ とすると $d^{(n)}(x,y) < \varepsilon$ となり、$\delta = \varepsilon - d^{(n)}(x,y) > 0$ とおく。
ここで、$z \in B_n(y;\delta)$ とすると

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x,z) &\leq d^{(n)}(x,y) + d^{(n)}(y,z) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &= \varepsilon - \delta + d^{(n)}(y,z) \quad (\because \delta = \varepsilon - d^{(n)}(x,y)) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

したがって、$z \in B_n(x;\varepsilon)$ が成立するため、$B_n(y;\delta) \subseteq B_n(x;\varepsilon) \subseteq M$ が成立する。
y は M の内点であることが分かり、$y \in M^i$ が成立する。よって、$B_n(x;\varepsilon) \subseteq M^i$ となり、x は M^i の内点であることが分かる。

(2) $M^a \subseteq (M^a)^a$ は明らかであるため、$(M^a)^a \subseteq M^a$ を示す。
$x \in (M^a)^a$ に対して、$\forall \varepsilon > 0 \quad B_n(x;\varepsilon) \cap M^a \neq \emptyset$ が成立する。$y \in B_n(x;\varepsilon) \cap M^a$ とすると、$d^{(n)}(x,y) < \varepsilon$ となり、$\delta = \varepsilon - d^{(n)}(x,y) > 0$ とおく。
ここで、$z \in B_n(y;\delta)$ とすると

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x,z) &\leq d^{(n)}(x,y) + d^{(n)}(y,z) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &= \varepsilon - \delta + d^{(n)}(y,z) \quad (\because \delta = \varepsilon - d^{(n)}(x,y)) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

したがって、$z \in B_n(x;\varepsilon)$ が成立するため、$B_n(y;\delta) \subseteq B_n(x;\varepsilon) \subseteq M$ が成立する。
y は M の内点であることが分かり、$y \in (B_n(x;\varepsilon) \cap M^a) \subseteq M$ が成立する。よって、