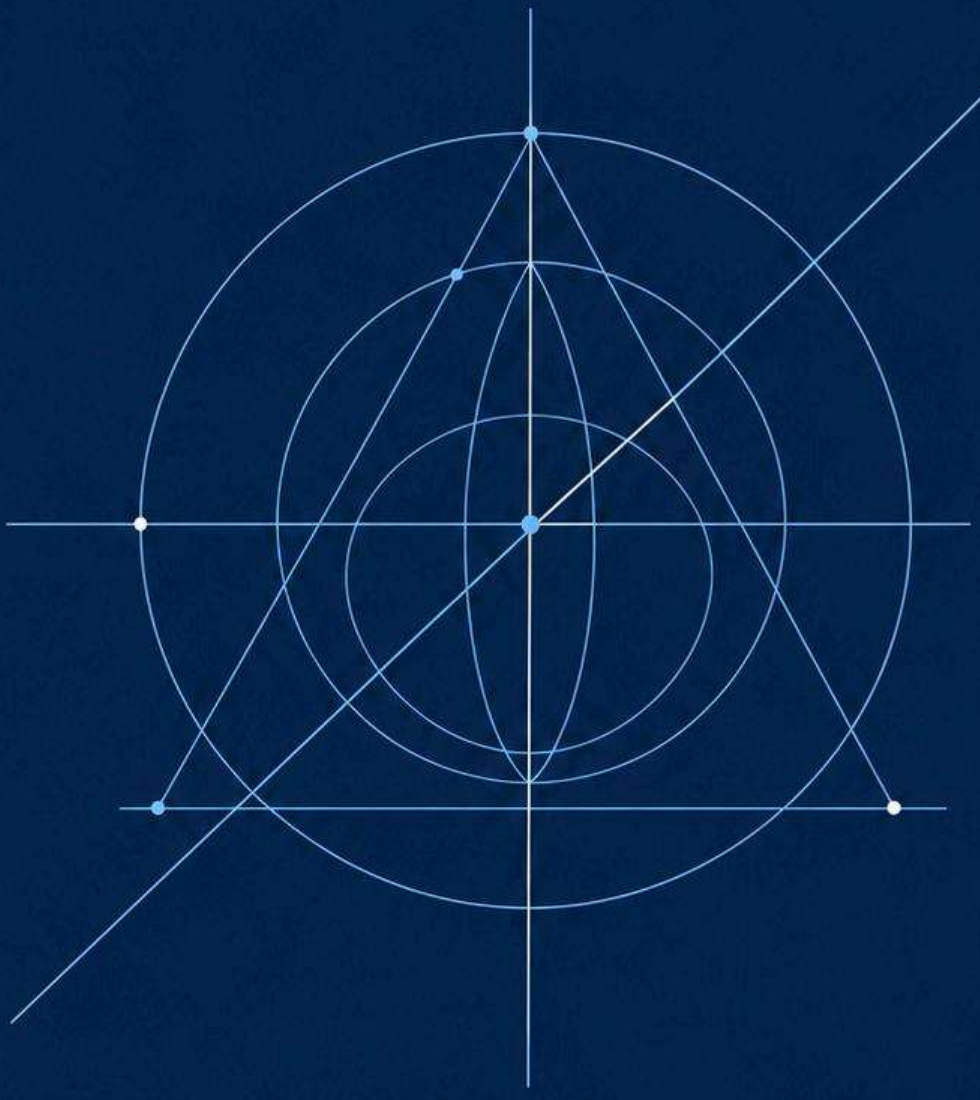
HIGH SCHOOL MATHEMATICS

高校数学
重要事項集



著者　杣山大翔

0.0 まえがき

数学を学ぶとは、どういうことだろうか。定義や定理、公式を覚えることだろうか。あるいは、問題の解き方を身に付け、試験で得点できるようになることだろうか。もちろん、これらはいずれも数学を学ぶうえで大切なことである。しかし、私はそれだけでは**十分ではない**と考えている。

数学を学ぶうえでは、まず定義や定理、公式といった知識を正しく理解し、身に付ける必要がある。しかし、知識を**知っていること**と、それを実際に**使えること**は同じではない。例えば、ある定理を知っていても、問題のどこに着目すればその定理を使えるのかが分からなければ、十分に使いこなせているとはいえないだろう。問題文から必要な情報を読み取り、既に学んだ知識と結び付け、適切な解法を選択し、根拠を持って実行する。この一連の過程を身に付けることが、数学を学ぶうえで重要であると考えている。

私は、数学ができるようになるということは、単に解法を暗記することではなく、問題に応じて必要な知識を選択し、それを適切に運用できるようになることだと考えている。初めて見る問題であっても、既に学んだ知識を手掛かりに解決の糸口を探し、筋道を立てて解答を組み立てることができる。そのためには、解答の手順だけでなく、なぜその解法を選ぶのか、問題文のどこに着目するのか、どのような根拠に基づいて式を立てるのかといった、**思考の過程を理解する必要がある**。本書シリーズでは、このような力を身に付けることを大切にしている。

また、数学の学習において、間違えることは決して無駄ではない。私は、勉強とは「バツをマルに変えるもの」だと考えている。ただし、間違えた問題の正解を覚えるだけでは、本当の意味でバツをマルに変えたことにはならない。知識の理解が不十分だったのか、問題文から条件を読み取れなかったのか、解法の選択を誤ったのか、あるいは計算を間違えたのか。間違いの原因を振り返り、それに応じて理解や考え方を**修正すること**が大切である。そして、修正した考え方を別の問題でも使えるようになったとき、学習はより確かなものになるだろう。本書シリーズが、読者の皆さんにとって、単に正解を増やすためだけでなく、自ら考え、学びを深めていくための手助けとなれば幸いである。

本書シリーズは、高校数学を学習する人全体を対象としている。もちろん、学校の定期試験や大学入学試験で得点することも、重要な目的の一つである。しかし、数学を学ぶ意義は、それだけにとどまらない。社会人の学び直しや教員の教材研究、知的好奇心から数学を学ぶ小・中学生など、試験を控えていない人にも、本書シリーズを活用していただきたいと考えている。私は、数学的な知識や考え方を身に付けることが、数学そのものへの理解を深めるだけでなく、自然科学の発展や、物事を筋道立てて考える力の涵養にもつながると考えている。そのような数学の価値を伝え、少しでも数学の学習に貢献できればと思い、本書シリーズを執筆している。

本書シリーズを読んでくださる方の中には、著者である私と直接話す機会のある方もいるだろう。本書を読むだけでなく、私と数学について話をすることによって、新たな見方に気付いたり、理解を深めたりすることもあるかもしれない。機会があれば、ぜひ気軽に話しかけていただきたい。私自身も、どのような方が本書シリーズを手に取り、どのようなことを考えながら数学を学んでいるのかに興味がある。数学について、あるいは本書シリーズについて、さまざまな話ができれば嬉しく思う。

さて、本書シリーズの構成と使用方法について説明しておこう。本書シリーズは、

(1)『高校数学 - 重要事項集』

(2)『基本問題集』
(3)『高校数学再攻略テキスト』
(4)『 - 演習 - 問題集』
(5)『[付録] 重要定理証明 Book』

以上の 5 冊によって構成されている。基本的には (1), (2) を一つの組、(3), (4) をもう一つの組とし、さらに付録として (5) を用意している。それぞれの役割と想定している使用方法は、以下の通りである。

(a) (1) を読み進め、定義・定理・公式などの数学的な知識を理解する。
(b) (2) の問題を解き、身に付けた知識を実際に使えるかどうかを確かめる。
(c) (1), (2) を往復しながら学習を繰り返し、(2) の問題の 8〜9 割程度を解けるようにする。この際、正解できたかどうかだけでなく、解法を選んだ根拠や間違いの原因にも目を向ける。
(d) (3) を読み、高校数学の各分野における知識や考え方のつながりを整理し、高校数学全体を俯瞰しながら学び直す。
(e) (3) で整理した知識をもとに、(4) の問題に取り組む。初見の問題に対しても、既習の知識を適切に選択・運用し、自ら解決の糸口を見いだす力を養う。

学習ペースには個人差があるため、必ずしもこの順番や進度に従う必要はないが、高校 1・2 年生のうちは、まず (*c*) までを一つの目標として取り組んでいただければ十分であると考えている。ただし、(1), (2) には高校 3 年生で学習する内容も含まれているため、相応の学習量があることには留意していただきたい。また、(5) は定理の証明をより深く学びたい場合などに、必要に応じて活用してほしい。
最後に、本書の具体的な使い方について、いくつか補足しておこう。『高校数学 - 重要事項集』および『基本問題集』は、高校数学を初めて学ぶ人や、既習内容を十分に理解できていない人が、基礎から学習することを想定している。そのため、学校の授業で既に十分理解できている範囲については、必要に応じて問題演習から取り組んだり、未習範囲へ進んだりしてもよい。もちろん、本書には学校の授業で扱う内容にとどまらず、やや発展的な知識も含まれているが、すべてを同じ深さで学習する必要はない。自分の理解度や目的に応じて、柔軟に活用していただきたい。
また、数学を学ぶ際には、本書だけでなく、さまざまな教科書や参考書を併用することを勧めたい。同じ定理や公式であっても、説明の仕方が変われば、新たな理解につながることがある。異なる説明に触れることで、一つの数学的事象を多角的に捉えたり、異なる問題の背後にある共通の構造に気付いたりすることもできるだろう。特に苦手な分野では、自分にとって理解しやすい説明を探すことも、学習を進めるうえで有効である。本書もまた、数学を学ぶための教材の一つにすぎない。ほかの教材も積極的に活用しながら、自分なりの理解を築いていってほしい。
本書シリーズが、読者の皆さんにとって、数学の知識を身に付けるだけでなく、それらを結び付け、自ら考え、問題を解決する力を育む一助となることを願っている。そして、数学を学ぶ過程そのものを楽しんでいただければ、著者としてこれ以上嬉しいことはない。

目次

第 0 章

0.1 学習の手引 5

第 1 章 数学 I 7

1.1 数と式 8

1.1.1 多項式の計算 8

1.1.2 実数 17

1.1.3 不等式 27

1.2 集合と命題 33

1.2.1 集合 33

1.2.2 命題 40

1.3 2 次関数 48

1.3.1 関数 48

1.3.2 2 次関数のグラフ 49

1.3.3 2 次方程式と解 51

第 2 章 索引 53

0.1 学習の手引

本書を読むにあたり構成や用いる記号について整理をしておく。

本書の構成

基本的には、以下の流れで進む。

1. 定義や定理
2. (証明)
3. 具体例や例題
4. 1. と 2. の繰り返し
5. (章の末尾に) 単元理解度チェックリスト

※適宜、別冊『基本問題集』掲載の問題番号を記載する。

ここで、多くの読者は「定義？定理？」となっていると思うため、説明しておく。

- **定義**
  扱う数学的な用語がどのような意味を持つのか説明したものである。辞書をイメージしていただければと思う。数学者などが言葉を用意しそれの意味を付ける際に定義を行っている。
  ex) 自然数 $\cdots$ 正の整数
- **定理**
  数学的に**導かれる**事実のこと。必ずそれが正しいという根拠 (**証明**) が存在する。これは決まりとは異なり、すでに用意されたモノや計算方式から導かれた結果となる。公式も定理に分類されることが多い。

続いて、本書で用いる記号や表記について記載しておく。

定義 0.1.1: タイトル

ここに定義が書かれる。

定理 0.1.2: タイトル

ここに定理が書かれる。

解法 0.1.3: タイトル

ここに特に重要な解法が書かれる。

証明.
ここに直前に書かれた定理の証明が書かれる。 ■

タイトル

具体例や例題など、適宜使用する。

※補足事項が書かれる。

⚠ 注意事項が書かれる。

数学I

第 1 章

1.1 数と式

1.1.1 多項式の計算

定義 1.1.1: 単項式

数や文字およびそれらを掛け合わせてできる式を**単項式**という。
単項式において、数の部分をその単項式の**係数**といい、掛け合わせた文字の個数をその単項式の**次数**という。ただし、0 の次数は考えないものとし、0 以外の数だけの単項式の次数は 0 とする。
⚠ 特に指定がない場合は、式に含まれるアルファベット・ギリシャ文字などをすべて文字として扱う。
一方、「x に着目する」などと指定された場合は、指定された文字以外を係数の一部として扱う。

[例題] 単項式・係数・次数

次の中から単項式を選び、その係数と次数を答えよ。

(a) $4a^5$
(b) $a^2 + a^2b^2 + b^2$
(c) $-2xy$
(d) $-x^3y^2z$
(e) $x^3 - 4x^2 + x + 8$

関連問題 ⟶『基本問題集』P6 問題 **1.**

[解答]
単項式 $\cdots$ (a),(c),(d)
(b),(e) は「数や文字を掛け合わせただけでは構成できない」ため、単項式でない。

(a) 係数 $\cdots 4$
　　次数 $\cdots 5$
(c) 係数 $\cdots -2$
　　次数 $\cdots 2$
(d) 係数 $\cdots -1$
　　次数 $\cdots 6$

[例題] ある文字に着目したときの係数・次数

次の多項式で、[ ] 内の文字に着目したときの係数と次数を答えよ。

(1) $-2xy$　[x] [y]
(2) $-x^3y^2z$　[x と y] [y と z]

関連問題 ⟶『基本問題集』P6 問題 **2.**

[解答]

(1) $[x]$ に着目すると、

係数 $\cdots -2y$

次数 $\cdots 1$

$[y]$ に着目すると、

係数 $\cdots -2x$

次数 $\cdots 1$

(2) $[x$ と $y]$ に着目すると、

係数 $\cdots -z$

次数 $\cdots 5$

$[y$ と $z]$ に着目すると、

係数 $\cdots -x^3$

次数 $\cdots 3$

定義 1.1.2: 多項式

いくつかの単項式の和の形で表すことのできるものを**多項式 (整式)** という。
多項式において、それを構成する各単項式を**項**という。多項式の項の中で文字の部分が同じである項を**同類項**という。
同類項をまとめて整理した多項式において、最も次数の高い項の次数を多項式の**次数**といい、次数が n の多項式を $\boldsymbol{n}$ **次式**という。
また、文字を含まない項を**定数項**という。
なお、単項式は項が 1 つの多項式と考えることとする。

定義 1.1.3: 降べき・昇べきの順

多項式において、ある 1 文字に注目して
次数が高い順に項を並び変えることを**降べきの順**に整理するといい、
次数が低い順に項を並び変えることを**昇べきの順**に整理するという。

[例題] 多項式の整理

次の多項式で、[ ] 内の文字に着目して降べきの順に整理し、多項式の次数、定数項をそれぞれ答えよ。

(1) $2+5x^4+x^2+3x^3-5x^4-3x^2-5 \quad [x]$

(2) $b^3+3a^2b+2ab-5ab^2+2a-2b \quad [a] \ [b]$

関連問題 ⟶『基本問題集』P6 問題 **3.**

[解答]

(1) $[x]$ に着目すると、

降べきの順に整理した式 $\cdots 3x^3-2x^2-3$

多項式の次数 $\cdots 3$

定数項 $\cdots -3$

(2) $[a]$ に着目すると、

降べきの順に整理した式 $\cdots 3ba^2+(-5b^2+2b+2)a+b^3-2b$

多項式の次数 $\cdots 2$

定数項 $\cdots +b^3-2b$

$[b]$ に着目すると、

降べきの順に整理した式 $\cdots b^3-5ab^2+(3a^2+2a-2)b+2a$

多項式の次数 $\cdots 3$

定数項 $\cdots 2a$ ⚠ 注目する文字によって、多項式の次数が変わるため注意すること。

⚠ 可能であれば次数の等しい項はその文字で括ると良い。

ex) $b^2+1+2b+3ab$ を $[b]$ についての降べきの順にするときに、$b^2+2b+3ab+1$ よりも $b^2+(2+3a)b+1$ の方が好ましい。

「括(くく)る」が分からない場合は**「定理 1.1.11 因数分解公式 (1)」**を参照

定理 1.1.4: 多項式の計算法則

多項式 A,B,C に対しても、数の場合と同様に次が成立する。

1. **交換法則** $\cdots A+B=B+A,\quad AB=BA$
2. **結合法則** $\cdots (A+B)+C=A+(B+C),\quad (AB)C=A(BC)$
3. **分配法則** $\cdots A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC$

解法 1.1.5: 多項式の筆算

次数の高い多項式の足し算や引き算は計算難易度が高く、ミスも増えてしまう。そのため、テクニックとして、多項式の筆算を紹介しておく。

$$A=2x^8-4x^7+5x^6+x^4-8x^3+4x+3$$
$$B=-2x^7+5x^6-7x^5+8x^3+5x^2+x-2$$

に対して、$A+B, A-B$ を求めてみよう。

多項式の足し算・引き算は同じ次数の項にだけ注目して計算すれば良いため、次数の同じ項を縦に並べて筆算を行う。

- $A+B$ を計算する。

	A	$=$	$2x^8$	$-4x^7$	$+5x^6$		$+x^4$	$-8x^3$		$+4x$	$+3$
$+)$	B	$=$		$-2x^7$	$+5x^6$	$-7x^5$		$+8x^3$	$+5x^2$	$+x$	-2
	$A+B$	$=$	$2x^8$	$-6x^7$	$+10x^6$	$-7x^5$	$+x^4$		$+5x^2$	$+5x$	$+1$

以上より、

$A+B=2x^8-6x^7+10x^6-7x^5+x^4+5x^2+5x+1$

- $A-B$ を計算する。

$$
\begin{array}{llccccccccc}
 & A & = & 2x^8 & -4x^7 & +5x^6 & & +x^4 & -8x^3 & & +4x & +3 \\
-) & B & = & & -2x^7 & +5x^6 & -7x^5 & & +8x^3 & +5x^2 & +x & -2 \\
\hline
 & A-B & = & 2x^8 & -2x^7 & & +7x^5 & +x^4 & -16x^3 & -5x^2 & +3x & +5
\end{array}
$$

以上より、

$A - B = 2x^8 - 2x^7 + 7x^5 + x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 3x + 5$

関連問題 → 『基本問題集』P7 問題 **4.**

定義 1.1.6: 累乗

文字 a をいくつか掛けたものを a の**累乗**という。

a を n 回掛けたものを a の $\boldsymbol{n}$ **乗**といい、a^n と書く。また、a^n における n を**指数**という。

定理 1.1.7: 指数法則

m, n は正の整数とする。以下が成立する。

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

[例題] 指数法則

次の式を計算せよ。

(1) $2x^2 \times 3x^5$

(2) $3ab^2c^4 \times 5a^2b^3c^4$

(3) $-2st^3 \times \left(3s^3t\right)^2$

関連問題 → 『基本問題集』P7 問題 **5.**

[解答]

※積の記号「×」は「·」と書くこともある。文字を含む積では「·」をよく用いるが、数字同士の積では小数点と混同する恐れがあるため普通用いない。

(1) **「定理 1.1.7 指数法則 (1)」**を用いる。

$2x^2 \times 3x^5 = (2 \times 3) \times \left(x^2 \times x^5\right) = 6 \times x^{2+5} = 6x^7$

(2) **「定理 1.1.7 指数法則 (1)」**を用いる。

$3ab^2c^4 \times 5a^2b^3c^4 = (3 \times 5) \times \left(ab^2c^4 \times a^2b^3c^4\right) = 15 \times a^{1+2}b^{2+3}c^{4+4} = 15a^3b^5c^8$

(3) 「**定理 1.1.7 指数法則 (1),(2),(3)**」を用いる。

$$\begin{aligned}
-2st^3 \times \left(3s^3t\right)^2 &= -2st^3 \times 3^2\left(s^3\right)^2 t^2 \qquad \left(\because \text{「定理 1.1.7 指数法則 (3)」より } \left(3s^3t\right)^2 = 3^2\left(s^3\right)^2 t^2\right) \\
&= -2st^3 \cdot 9s^{3\times 2}t^2 \qquad (\because \text{「定理 1.1.7 指数法則 (2)」より}) \\
&= \{(-2)\times 9\} \times \left(st^3 \times s^6t^2\right) \\
&= -18 \times s^{1+6}t^{3+2} \qquad (\because \text{「定理 1.1.7 指数法則 (1)」より}) \\
&= -18s^7t^5
\end{aligned}$$

定義 1.1.8: 展開

いくつかの多項式の積の形をした式において、積を計算して単項式の和の形に表すことをその式を**展開**するという。

[例題] 展開 (分配法則)

次の式を展開せよ。

(1) $3x\left(2x^2-3x+1\right)$

(2) $\left(a^2+2a-5\right)b$

(3) $\left(x^2+2x+3\right)(x-2)$

関連問題 ⟶ 『基本問題集』P8 問題 **6.**

[解答]

(1) $3x\left(2x^2-3x+1\right) = 3x\cdot 2x^2 + 3x\cdot(-3x) + 3x\cdot 1 = 6x^3-9x^2+3x$

(2) $\left(a^2+2a-5\right)b = a^2b+2ab-5b$

(3)
$$\begin{aligned}
\left(x^2+2x+3\right)(x-2) &= A(x-2) \qquad (A = x^2+2x+3 \text{ とした}) \\
&= Ax + A\cdot(-2) \qquad (\because \text{「定理 1.1.4 多項式の分配法則」より}) \\
&= \left(x^2+2x+3\right)x + \left(x^2+2x+3\right)\times(-2) \qquad \left(A = x^2+2x+3 \text{ より}\right) \\
&= \left(x^3+2x^2+3x\right) + \left(-2x^2-4x-6\right) \\
&= x^3 + (2-2)x^2 + (3-4)x - 6 \\
&= x^3 - x - 6
\end{aligned}$$

定理 1.1.9: 展開公式

A, B, C を数または多項式とする。以下が成立する。

(1) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

(2) $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

(4) $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA$

[例題] 展開 (展開公式)

次の式を展開せよ。

(1) $(2x+3y)^2$

(2) $(3x-4y)^2$

(3) $(5x+4y)(5x-4y)$

(4) $(a+2b+3c)^2$

(5) $(a-2b+3c)^2$

関連問題 → 『基本問題集』P8 問題 **7.**

[解答]

(1) **「定理 1.1.9 展開公式 (1)」**を用いる。

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(2) **「定理 1.1.9 展開公式 (2)」**を用いる。

$$(3x-4y)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

(3) **「定理 1.1.9 展開公式 (3)」**を用いる。

$$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2 - (4y)^2 = 25x^2 - 16y^2$$

(4) **「定理 1.1.9 展開公式 (4)」**を用いる。

$$\begin{aligned}(a+2b+3c)^2 &= a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 + 2\cdot a\cdot 2b + 2\cdot 2b\cdot 3c + 2\cdot 3c\cdot a\\ &= a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 12bc + 6ca\end{aligned}$$

(5) **「定理 1.1.9 展開公式 (4)」**を用いる。

$$\begin{aligned}(a-2b+3c)^2 &= \{a+(-2b)+3c\}^2\\ &= a^2 + (-2b)^2 + (3c)^2 + 2\cdot a\cdot(-2b) + 2\cdot(-2b)\cdot 3c + 2\cdot 3c\cdot a\\ &= a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab - 12bc + 6ca\end{aligned}$$

定義 1.1.10: 因数分解

多項式を多項式の積の形に表すことを、「もとの式を**因数分解**する」という。このとき、積を構成する各多項式を、もとの式の**因数**という。

定理 1.1.11: 因数分解公式

A, B, C, D, X を多項式とする。次が成立する。

(1) $AB + AC = A(B+C)$

(2) $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$

(3) $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$

(4) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

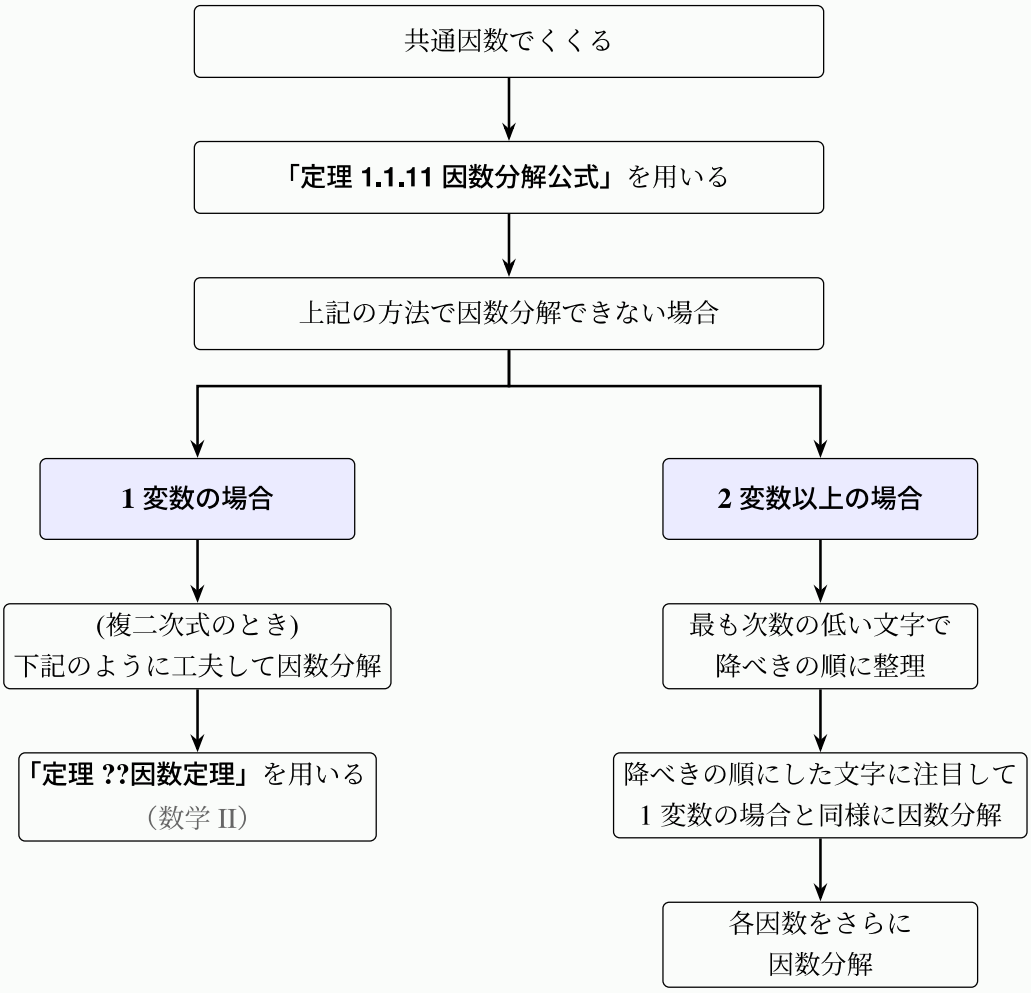
(5) $ACX^2 + (AD+BC)X + BD = (AX+B)(CX+D)$ **(たすき掛け)**

→ たすき掛けの詳細なやり方は例題を参照

※これらの式をよく見ると、(1) は**分配法則**、(2)〜(4) は**「定理 1.1.9 展開公式」**の両辺を入れ替えたものになっている。つまり、因数分解と展開は互いに**逆操作**である。

解法 1.1.12: 因数分解フローチャート

因数分解は、展開とは異なり実行すること自体が難しい。そのため、以下のフローチャートを参考にして、適切な方法を選択できるようにしよう。



(複二次式 $ax^4 + bx^2 + c$ のとき) 次のような解法を用いる

$$
\begin{aligned}
x^4 + x^2 + 1 &= \left(x^4 + x^2 + 1\right) + x^2 - x^2 \qquad (\because \text{与式に } x^2 - x^2 \text{つまり } 0 \text{ を足している}) \\
&= \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - x^2 \\
&= \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 \qquad (\because \text{「定理 1.1.11 因数分解公式 (2)」より}) \\
&= \left\{\left(x^2 + 1\right) + x\right\}\left\{\left(x^2 + 1\right) - x\right\} \qquad (\because \text{「定理 1.1.11 因数分解公式 (4)」より}) \\
&= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)
\end{aligned}
$$

⚠ この解法は、複二次式の因数分解で頻出な解法なだけであり、ただ単に因数分解公式を適用するだけで解ける問題も存在する。

[例題] 因数分解

次の式を因数分解せよ。

(1) $4x+18y$

(2) $4a^2+12a+9$

(3) $x^2-10xy+25y^2$

(4) $16x^2-25y^2$

(5) $2a^2+3a+1$

(6) $4x^2-15xy+9y^2$

(7) x^4+3x^2-10

(8) x^4+2x^2+9

(9) x^3+x^2y+x+y

(10) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

関連問題 ⟶『基本問題集』P9 問題 **8.**

[解答]

(1) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (1)」**を用いる。

$4x+18y=2(2x+9y)$

(2) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (2)」**を用いる。

$4a^2+12a+9=(2a)^2+2\cdot 3\cdot(2a)+3^2=(2a+3)^2$

(3) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (3)」**を用いる。

$x^2-10xy+25y^2=x^2-2\cdot x\cdot(5y)+(5y)^2=(x-5y)^2$

(4) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (4)」**を用いる。

$16x^2-25y^2=(4x)^2-(5y)^2=(4x-5y)(4x+5y)$

(5) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (5)」**を用いる。

$(\ 2a\ +\ 1\ )\to a$

$(\ a\ +\ 1\ )\to 2a$

$2a^2\quad 1\quad 3a$

上図より、$2a^2+3a+1=(2a+1)(a+1)$

(6) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (5)」**を用いる。

$(\ 4x\ +\ -3y\ )\to -3xy$

$(\ x\ +\ -3y\ )\to -12xy$

$4x^2\quad 9y^2\quad -15xy$

上図より、$4x^2-15xy+9y^2=(4x-3y)(x-3y)$

(7) **「定理 1.1.11 因数分解公式 (5)」**を用いる。

$(\ x^2\ +\ 5\ ) \to -2x^2$

$\times$

$(\ x^2\ +\ -2\ ) \to 5x^2$

$x^4 \quad -10 \quad 3x^2$

上図より、$x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 + 5)(x^2 - 2)$

※この問題のように、常に「x」について因数分解をしようとするのではなく、問題に応じて何を 1 つの文字とするのかを考えるようにすることが大切である。

今回の場合は「x^2」を 1 つの文字 (カタマリ) として与式を $\left(x^2\right)^2 + 3 \cdot x^2 - 10$ のように捉えている。

(8) **「定理 1.1.11 因数分解公式」**に用いることのできそうな公式がないため、フローチャートに則り複二次式の解法を用いる。

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 9 &= \left(x^4 + 2x^2 + 9\right) + 4x^2 - 4x^2 \quad (\because \text{与式に } 4x^2 - 4x^2 \text{つまり } 0 \text{ を足している}) \\ &= \left(x^4 + 6x^2 + 9\right) - (2x)^2 \\ &= \left(x^2 + 3\right)^2 - (2x)^2 \quad (\because \text{「定理 1.1.11 因数分解公式 (2)」より}) \\ &= \left\{\left(x^2 + 3\right) + 2x\right\}\left\{\left(x^2 + 3\right) - 2x\right\} \quad (\because \text{「定理 1.1.11 因数分解公式 (4)」より}) \\ &= \left(x^2 + 2x + 3\right)\left(x^2 - 2x + 3\right) \end{aligned}$$

(9) **「定理 1.1.11 因数分解公式」**に用いることのできそうな公式がないため、フローチャートに則り最も次数の低い文字、今回は y に関して降べきの順に整理する。

$x^3 + x^2y + x + y = (x^2 + 1)y + (x^2 + 1)x$

y の 1 次式として因数分解を行う。

$(x^2 + 1)y + (x^2 + 1)x = (x^2 + 1)(x + y)$ $\quad (\because$ **「定理 1.1.11 因数分解公式 (1)」**より)

(10) **「定理 1.1.11 因数分解公式」**に用いることのできそうな公式がないため、フローチャートに則り最も次数の低い文字、今回は a, b, c すべて同じ次数なのでどの文字でも良いので選び、その文字に関して降べきの順に整理する。今回は a について整理する。

$$\begin{aligned} ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) &= a^2b - ab^2 + bc(b-c) + c^2a - ca^2 \\ &= (b-c)a^2 + (c^2 - b^2)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)a^2 + (c+b)(c-b)a + bc(b-c) \\ &\quad (\because \text{「定理 1.1.11 因数分解公式 (4)」より}) \\ &= (b-c)a^2 - (c+b)(b-c)a + bc(b-c) \end{aligned}$$

a の 2 次式として因数分解を行う。

$(b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) = (b-c)\left\{a^2 - (b+c)a + bc\right\}$

$(\ a\ +\ -b\ ) \to -ac$

$\times$

$(\ a\ +\ -c\ ) \to -ab$

$a^2 \quad bc \qquad -ab - ac = -(b+c)a$

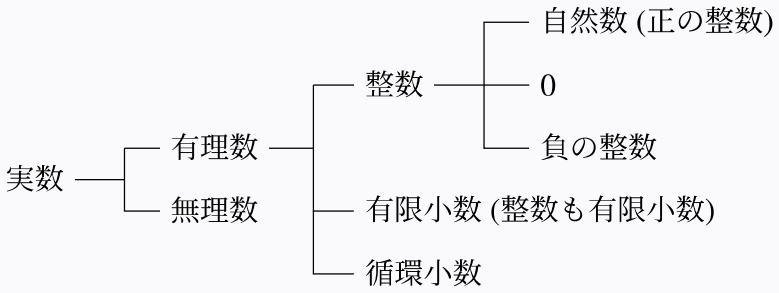
上図より、$(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}=(b-c)(a-b)(a-c)=(a-b)(a-c)(b-c)$

1.1.2実数

定義 1.1.13: 数の分類

数の分類について整理する。

- $1, 2, 3, \cdots$ を**自然数**または**正の整数**
- $-1, -2, -3, \cdots$ を**負の整数**
- 自然数、負の整数、0 の総称を**整数**
- 整数 $p, q(p \neq 0)$ を用いて $\dfrac{q}{p}$ の形で表すことのできる数を**有理数**
- 整数 $p, q(p \neq 0)$ を用いて $\dfrac{q}{p}$ の形で表すことのできない数を**無理数**
- 有理数と無理数の総称を**実数**
- 小数部分の数字が、あるところから一定の周期で繰り返される小数を**循環小数**
- 小数で表したとき、小数部分の桁数が有限である数を**有限小数**
- 小数で表したとき、小数部分の桁数が有限でない数を**有限小数**



※無限小数は、無理数と循環小数の総称とも捉えられる。

[例題] 数の分類

$$-8,\ 0,\ -\sqrt{5},\ 0.8,\ 1,\ 3.333\cdots,\ -5,\ -0.14,\ -1.438438\cdots,\ \sqrt{3},\ 23,\ \text{円周率}$$

上記の数から、以下にあてはまるものをそれぞれすべて答えよ。

(1) 自然数
(2) 整数
(3) 有限小数
(4) 循環小数
(5) 有理数
(6) 無理数
(7) 実数

[解答](順不同)

(1) 自然数：$1,\ 23$

(2) 整数：$-8,\ -5,\ 0,\ 1,\ 23$

(3) 有限小数：$-8, 0, 1, 23, 0.8,\ -0.14$

(4) 循環小数：$3.333\cdots,\ -1.438438\cdots$

(5) 有理数：$-8,\ -5,\ 0,\ 1,\ 23,\ 0.8,\ -0.14,\ 3.333\cdots,\ -1.438438\cdots$

(6) 無理数：$-\sqrt{5},\ \sqrt{3}$, 円周率

(7) 実数：上記の数全て

[例題] 数と演算

自然数、整数、有理数、実数について、それぞれ次の問いに答えよ。

(1) 2 つの自然数の和・差・積・商は、必ず自然数になるといえるか。

(2) 2 つの整数の和・差・積・商は、必ず整数になるといえるか。

(3) 2 つの有理数の和・差・積・商は、必ず有理数になるといえるか。

(4) 2 つの実数の和・差・積・商は、必ず実数になるといえるか。

ただし、商については、0 で割る場合を除くものとする。
また、各問いについて、必ずそうなるといえない場合にはその例を 1 つ挙げよ。

[解答]

(1) 自然数

和 → 必ず自然数になる。

差 → 自然数にならない例がある。例：$1-2=-1$

積 → 必ず自然数になる。

商 → 自然数にならない例がある。例：$1\div 2=\dfrac{1}{2}$

(2) 整数

和 → 必ず整数になる。

差 → 必ず整数になる。

積 → 必ず整数になる。

商 → 整数にならない例がある。例：$1\div 2=\dfrac{1}{2}$

(3) 有理数

和 → 必ず有理数になる。

差 → 必ず有理数になる。

積 → 必ず有理数になる。

商 → 必ず有理数になる。

(4) 実数

和 → 必ず実数になる。

差 → 必ず実数になる。

積 → 必ず実数になる。

商 → 必ず実数になる。

定義 1.1.14: 循環小数の表し方

循環小数は、小数の値があるところで繰り返す。そこで、繰り返す最初の数字と最後の数字の上に ·(ドット) と打ちそれ以降は省略して書き表す。同じ数字を繰り返す場合は最初の数字のみに · ドットを打ち、その後は省略する。

また、循環小数の繰り返す一つの数字列を**循環節**という。

[例題] 循環小数

次の数を**「定義 1.1.14 循環小数の表し方」**に従って表記し直し、循環節を答えよ。

(1) $0.555\cdots$

(2) $-0.231231231\cdots$

(3) $34.343434\cdots$

(4) $-0.1424242\cdots$

(5) $19.257362573625736\cdots$

[解答]

(1) $0.555\cdots = 0.\dot{5}$

循環節：5

(2) $-0.231231231\cdots = -0.\dot{2}3\dot{1}$

循環節：231

(3) $34.343434\cdots = 34.\dot{3}\dot{4}$

循環節：34

(4) $-0.1424242\cdots = -0.1\dot{4}\dot{2}$

循環節：42

(5) $19.257362573625736\cdots = 19.\dot{2}5736\dot{}$

循環節：25736

解法 1.1.15: 循環小数を分数にする方法

全ての循環小数は以下の手順により分数になることが知られている。

分数にする循環小数を x とする。

(1) 循環節の桁数 k を求め、$10^k x - x$ を行うと有限小数になる (例題で確認)。

(2) $10^k x - x =$ (有限小数) より、両辺を $10^k - 1$ で割ることにより分数で表現できる。

この方法は、$10^k x - x$ をすることによって循環している部分が相殺されて、有限小数となることを用いて分数の形にしている。

[例題] 循環小数を分数に

次の循環小数を分数にせよ。

(1) $0.\dot{1}$

(2) $0.\dot{1}2\dot{3}$

(3) $1.2\dot{3}\dot{4}$

関連問題 → 『基本問題集』P10 問題 **1.**

[解答]

(1) **「解法 1.1.15 循環小数を分数にする方法」**を用いる。

循環節は 1 であり、その桁数は 1 であるため、

$$\begin{aligned} 10^1 \times 0.\dot{1} - 0.\dot{1} &= 10 \times 0.\dot{1} - 0.\dot{1} \\ &= 1.\dot{1} - 0.\dot{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 10 \times 0.\dot{1} - 0.\dot{1} &= 1 \\ (10-1) \times 0.\dot{1} &= 1 \\ 9 \times 0.\dot{1} &= 1 \\ 0.\dot{1} &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

よって、$0.\dot{1}$ を分数にすると $\dfrac{1}{9}$

(2) **「解法 1.1.15 循環小数を分数にする方法」**を用いる。

循環節は 123 であり、その桁数は 3 であるため、

$$\begin{aligned} 10^3 \times 0.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3} &= 1000 \times 0.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3} \\ &= 123.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3} \\ &= 123 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 1000 \times 0.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3} &= 123 \\ (1000-1) \times 0.\dot{1}2\dot{3} &= 123 \\ 999 \times 0.\dot{1}2\dot{3} &= 123 \\ 0.\dot{1}2\dot{3} &= \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \end{aligned}$$

よって、$0.\dot{1}2\dot{3}$ を分数にすると $\dfrac{41}{333}$

(3) **「解法 1.1.15 循環小数を分数にする方法」**を用いる。

循環節は 34 であり、その桁数は 2 であるため、

$$\begin{aligned} 10^2 \times 1.2\dot{3}\dot{4} - 1.2\dot{3}\dot{4} &= 100 \times 1.2\dot{3}\dot{4} - 1.2\dot{3}\dot{4} \\ &= 123.4\dot{3}\dot{4} - 1.2\dot{3}\dot{4} \\ &= 122.2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 100 \times 1.2\dot{3}\dot{4} - 1.2\dot{3}\dot{4} &= 122.2 \\ (100-1) \times 1.2\dot{3}\dot{4} &= 122.2 \\ 99 \times 1.2\dot{3}\dot{4} &= 122.2 \\ 1.2\dot{3}\dot{4} &= \frac{122.2}{99} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495} \end{aligned}$$

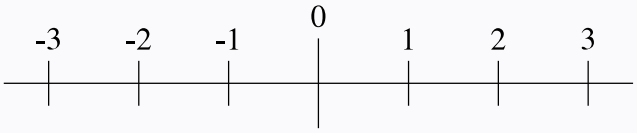
よって、$1.2\dot{3}\dot{4}$ を分数にすると $\dfrac{611}{495}$

定義 1.1.16: 数直線

直線上に基準となる点 O をとり、単位の長さと正の向きを定める。以下のように実数を対応させるとき、この直線を**数直線**という。

- P が O よりも正の方向にあり、辺 OP の長さが a のとき、正の実数 a を対応させる。
- P が O よりも負の方向にあり、辺 OP の長さが a のとき、負の実数 $-a$ を対応させる。
- P が O にあるときは 0 を対応させる。

数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、a を点 P の**座標**といい、座標が a である点 P を $P(a)$ と表す。



定義 1.1.17: 整数部分・小数部分

実数 a について、a 以下の最大の整数 n つまり、

$$n \leqq a < n+1$$

を満たす n を a の**整数部分**といい、$[a]$ と表す。
また、$a-[a]$ を a の**小数部分**という。
※この [　] を**ガウス記号**といい、$[a]$ を「ガウス a」のように言う。

[例題] 整数部分・小数部分

次の数の整数部分と小数部分を答えよ。

(1) 2.75

(2) $6.\dot{5}\dot{4}$

(3) -8.52

(4) $-12.3\dot{4}\dot{5}$

(5) $\sqrt{5}$

(6) 円周率 : π

[解答]

(1) 整数部分 : $2 \leqq 2.75 < 2+1$ より、$[2.75] = 2$

小数部分 : $2.75 - [2.75] = 2.75 - 2 = 0.75$

(2) 整数部分 : $6 \leqq 6.\dot{5}\dot{4} < 6+1$ より、$[6.\dot{5}\dot{4}] = 6$

小数部分 : $6.\dot{5}\dot{4} - [6.\dot{5}\dot{4}] = 6.\dot{5}\dot{4} - 6 = 0.\dot{5}\dot{4}$

(3) 整数部分 : $-9 \leqq -8.52 < -9+1$ より、$[-8.52] = -9$

小数部分 : $-8.52 - [-8.52] = -8.52 - (-9) = -8.52 + 9 = 0.48$

(4) 整数部分 : $-13 \leqq -12.3\dot{4}\dot{5} < -13+1$ より、$[-12.3\dot{4}\dot{5}] = -13$

小数部分 : $-12.3\dot{4}\dot{5} - [-12.3\dot{4}\dot{5}] = -12.3\dot{4}\dot{5} - (-13) = -12.3\dot{4}\dot{5} + 13 = 0.6\dot{5}\dot{4}$

(5) 整数部分 : $4 \leqq 5 < 9$ より、$\sqrt{4} \leqq \sqrt{5} < \sqrt{9}$ つまり $2 \leqq \sqrt{5} < 2+1$ となるため、$\left[\sqrt{5}\right] = 2$

小数部分 : $\sqrt{5} - \left[\sqrt{5}\right] = \sqrt{5} - 2$

(6) 整数部分 : $3 \leqq \pi < 3+1$ より、$[\pi] = 3$

小数部分 : $\pi - [\pi] = \pi - 3$

定義 1.1.18: 絶対値

数直線上で、原点 $O(0)$ と点 $P(a)$ の間の距離を、実数 a の**絶対値**といい、$|a|$ と表す。

式で書くと以下のようになる。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

⚠ 定義より、$|a| = |-a|$ であることは明らかであろう。

[例題] 絶対値

次の値を求めよ。

(1) $|3|$

(2) $|-0.8|$

(3) $\left|-\frac{1}{3}\right|$

(4) $-|1.2|$

(5) $-\left|-\frac{3}{5}\right|$

関連問題 ⟶『基本問題集』P10 問題 **2.**

[解答]

(1) $|3| = 3$

(2) $|-0.8| = -(-0.8) = 0.8$

(3) $\left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

(4) $-|1.2| = -1.2$

(5) $-\left|-\frac{3}{5}\right| = -\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

定理 1.1.19: 数直線上の距離

数直線上の 2 点 $A(a), B(b)$ の距離 $\overline{AB}$ は、

$$\overline{AB} = |a-b| = |b-a|$$

となる。

[例題] 数直線上の距離

次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $A(2), B(5)$

(2) $A(-4), B(-1)$

(3) $A(-2), B(3)$

関連問題 ⟶『基本問題集』P11 問題 **3.**

[解答]

(1) $\overline{AB} = |2-5| = |-3| = 3$

(2) $\overline{AB} = |-4-(-1)| = |-3| = 3$

(3) $\overline{AB} = |-2-3| = |-5| = 5$

定義 1.1.20: 平方根

2 乗して $a(>0)$ になる数を、a の**平方根**といい、正の平方根を $\sqrt{a}$, 負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表す。
また、0 の平方根は $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$ と定義する。
なお、この記号 $\sqrt{\ }$ は**根号**といい、$\sqrt{a}$ を「**ルート** a」と読む。式にすると以下のようになる。

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

⚠ どんな数も 2 乗すると 0 以上になることから、実数の範囲では負の数の平方根は存在しない。

定理 1.1.21: 平方根の性質

$a > 0, b > 0, k > 0$ とする。以下が成立する。

(1) $\sqrt{a^2} = |a|$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(4) $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

定義 1.1.22: 有理化

分数において、分母や分子に根号 $\sqrt{\ }$ が含まれている場合がある。
分母にある根号を、根号の付かない形にすることを分母の**有理化**、
分子にある根号を、根号の付かない形にすることを分子の**有理化**という。

⚠ 一般に、解答の分母に根号が入っている場合は、分母の有理化をする。

[例題] 有理化

次の数に分母の有理化をせよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

(5) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

(6) $\dfrac{8}{\sqrt{6}}$

関連問題 ⟶『基本問題集』P11 問題 **4.**

[解答]

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(5) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

(6) $\dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

※ (4), (5), (6) は (1), (2), (3) と同様の方法で有理化が行えるため、その方法でも構わない。

解法 1.1.23: 2 重根号の外し方

根号の中に根号を含む数を **2 重根号**という。

特定の形の 2 重根号は 2 重根号を用いずに表せることが知られている。以下に公式を示す。

正の数 $a, b(>0)$ に対して、

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad (\text{ただし、} b \leqq a)$$

[例題]2 重根号

次の数の 2 重根号を外せ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{6+2\sqrt{8}}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(4) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(5) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(6) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

関連問題 ⟶『基本問題集』P12 問題 **5.**

[解答]

(1) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times1}} = \sqrt{3}+\sqrt{1} = \sqrt{3}+1$

(2) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$\sqrt{6+2\sqrt{8}} = \sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\times2}} = \sqrt{4}+\sqrt{2} = 2+\sqrt{2}$

(3) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2+2\sqrt{\dfrac{3}{4}}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+2\sqrt{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\times2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(5) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

(6) **「解法 1.1.23 2 重根号の外し方」**を用いる。

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4-2\sqrt{\frac{15}{4}}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)-2\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

定義 1.1.24: 対称式

2 つ以上の文字を含む多項式において、どの文字を入れ替えても式が変わらないような多項式を**対称式**という。

x, y の 2 変数の多項式において、対称式 $x+y, xy$ を**基本対称式**といい、

x, y, z の 3 変数の多項式において、対称式 $x+y+z, xy+yz+zx, xyz$ を**基本対称式**という。

基本対称式は変数の数ごとにそれぞれ決まっている。

定理 1.1.25: 対称式と基本対称式

どの対称式も基本対称式の和・差・積の形で表すことができる。

[例題] 対称式

次の多項式を基本対称式のみで表せ。

(1) x^2+y^2

(2) x^3+y^3

(3) $(x-y)^2$

(4) $x^2+y^2+z^2$

(5) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

関連問題 → 『基本問題集』P12 問題 **6.**

[解答]

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(3) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

(4) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

(5) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

1.1.3不等式

変数 x を含む不等式において、不等式を満たす x を不等式の**解**といい、不等式のすべての解を求めることを不等式を**解く**という。

⚠ 不等式のすべての解を単に解ということもある。

定理 1.1.27: 不等式の性質

A, B, C を多項式、r を実数とする。次が成立する。

(1) $A < B$ ならば $A + C < B + C$
　　$A \leqq B$ ならば $A + C \leqq B + C$

(2) $A < B$ ならば $A - C < B - C$
　　$A \leqq B$ ならば $A - C \leqq B - C$

(3) $A < B, r > 0$ ならば $rA < rB$
　　$A \leqq B, r > 0$ ならば $rA \leqq rB$

(4) $A < B, r < 0$ ならば $rA > rB$
　　$A \leqq B, r < 0$ ならば $rA \geqq rB$

(1), (2) より、不等式も方程式同様に**移項**できることが分かる。

[例題] 不等式

次の不等式を解け。

(1) $3x + 2 < 5x - 1$

(2) $7x - 3 > 2x + 2$

(3) $2x - 9 \leqq x + 4$

(4) $8x + 2 \geqq 4x - 6$

関連問題 ⟶『基本問題集』P12 問題 **1.**

[解答]

(1) $3x + 2 < 5x - 1$
$3x - 5x < -1 - 2$　(∵**「定理 1.1.27 不等式の性質 (2)」**より両辺から $5x + 2$ を引く)
$-2x < -3$
$x > \dfrac{3}{2}$　(∵**「定理 1.1.27 不等式の性質 (4)」**より)

(2) $7x - 3 > 2x + 2$
$7x - 2x > 2 + 3$　(∵**「定理 1.1.27 不等式の性質 (1),(2)」**より両辺に 3 を足し、$2x$ 引く)
$5x > 5$
$x > 1$　(∵**「定理 1.1.27 不等式の性質 (3)」**より)

(3) $2x - 9 \leqq x + 4$
$2x - x \leqq 4 + 9$　(∵**「定理 1.1.27 不等式の性質 (1),(2)」**より両辺に 9 を足し、x を引く)
$x \leqq 13$

(4)

$$
\begin{aligned}
8x + 2 &\geqq 4x - 6 \\
8x - 4x &\geqq -6 - 2 \qquad (\because \text{「定理 1.1.27 不等式の性質 (2)」より両辺から } 4x + 2 \text{ を引く}) \\
4x &\geqq -8 \\
x &\geqq -2 \qquad (\because \text{「定理 1.1.27 不等式の性質 (3)」より})
\end{aligned}
$$

定義 1.1.28: 連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたものを**連立不等式**といい、すべての不等式を同時にみたす変数の範囲を連立不等式の**解**という。こちらも、解を求めることを連立不等式を**解く**という。

[例題] 連立不等式

次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 5x - 5 < 2x + 4 \\ 4x + 1 > 6x - 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x < 5x + 1 \\ 5x + 2 > x + 10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 9x - 3 > 7x - 1 \\ 4x + 3 > 5x - 4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 6x - 1 > 8x + 3 \\ 2x - 3 > -x \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 9x + 3 \geqq 10x - 3 \\ -3x + 5 \leqq -5x + 11 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} -5x + 7 \leqq -3x + 5 \\ x + \dfrac{2}{3} \geqq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{19}{6} \end{cases}$

(7) $\begin{cases} -12x + 14 \leqq 3x - 16 \\ 4x - 6 \leqq 2x + 8 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 4 \leqq -x + 5 \\ 3x + 2 \leqq 4x - 3 \end{cases}$

関連問題 → 『基本問題集』P13 問題 **2.**

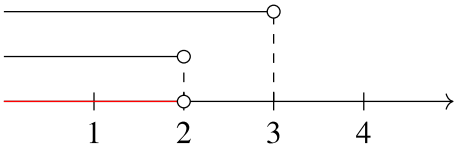
[解答]

各連立不等式において、上の式を (i)、下の式を (ii) とする。

(1) (i) を解くと、$x < 3$

(ii) を解くと、$x < 2$

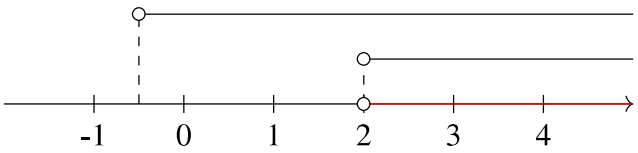
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $x < 2$



(2) (i) を解くと、$-\dfrac{1}{2} < x$

(ii) を解くと、$2 < x$

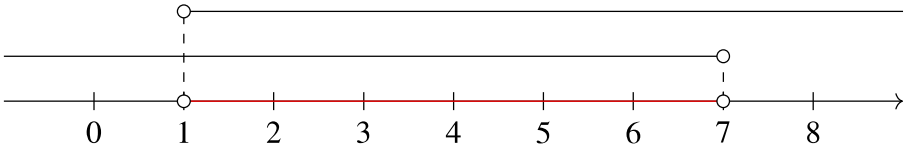
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $2 < x$



(3) (i) を解くと、$1 < x$

(ii) を解くと、$x < 7$

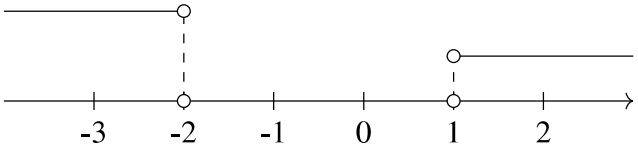
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $1 < x < 7$



(4) (i) を解くと、$x < -2$

(ii) を解くと、$1 < x$

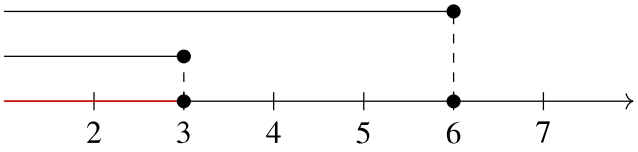
下図において、共通している部分が存在しないため、解はなし。



(5) (i) を解くと、$x \leqq 6$

(ii) を解くと、$x \leqq 3$

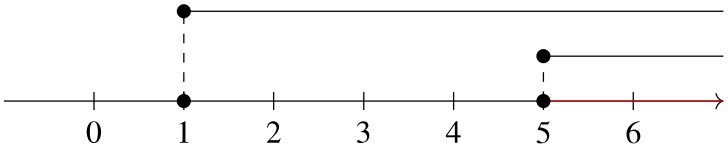
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $x \leqq 3$



(6) (i) を解くと、$1 \leqq x$

(ii) を解くと、$5 \leqq x$

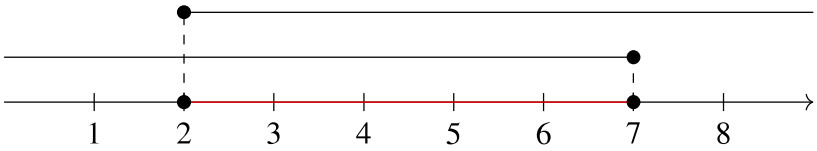
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $5 \leqq x$



(7) (i) を解くと、$2 \leqq x$

(ii) を解くと、$x \leqq 7$

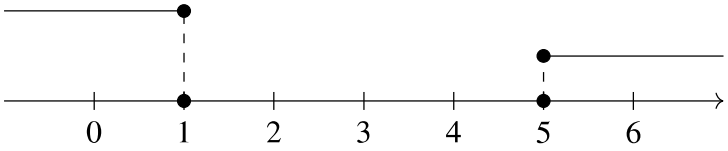
下図において、共通している部分が連立不等式の解であるため、解は $2 \leqq x \leqq 7$



(8) (i) を解くと、$x \leqq 1$

(ii) を解くと、$5 \leqq x$

下図において、共通している部分が存在しないため、解はなし。



定理 1.1.29: 絶対値と方程式・不等式

c を正の定数とする。次が成立する。

(1) $|x| = c$ の解は $x = \pm c$

(2) $|x| < c$ の解は $-c < x < c$

$|x| \leqq c$ の解は $-c \leqq x \leqq c$

(3) $|x| > c$ の解は $x < -c, c < x$

$|x| \geqq c$ の解は $x \leqq -c, c \leqq x$

[例題] 絶対値を含む方程式・不等式

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x| = 5$

(2) $-|x-6| = -2$

(3) $|x| < 4$

(4) $|x-8| < 3$

(5) $-|x-1| > -5$

(6) $2|x| \leqq 6$

(7) $-3 \leqq -|x-2|$

(8) $|x| > 9$

(9) $|3-x| \geqq 4$

(10) $|x-2|+3 \geqq 8$

関連問題 → 『基本問題集』P14 問題 **3.**

[解答]

(1) **「定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (1)　($c = 5$ のとき)」**を用いる。

解は $x = \pm 5$

(2) $-|x-6| = -2$

$|x-6| = 2$ (両辺に -1 を掛ける)

$x-6 = \pm 2$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (1) (c=2 のとき)**」より)

$x-6 = -2, 2$

$x = 4, 8$

(3) 「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (2) (c=4 のとき)**」を用いる。

解は $-4 < x < 4$

(4) $|x-8| < 3$

$-3 < x-8 < 3$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (2) (c=3 のとき)**」より)

$5 < x < 11$

(5) $-|x-1| > -5$

$|x-1| < 5$

$-5 < x-1 < 5$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (2) (c=5 のとき)**」より)

$-4 < x < 6$

(6) $2|x| \leqq 6$

$|x| \leqq 3$

$-3 \leqq x \leqq 3$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (2) (c=3 のとき)**」より)

(7) $-3 \leqq -|x-2|$

$3 \geqq |x-2|$

$|x-2| \leqq 3$

$-3 \leqq x-2 \leqq 3$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (2) (c=3 のとき)**」より)

$-1 \leqq x \leqq 5$

(8) 「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (3) (c=9 のとき)**」を用いる。

解は $x < -9, 9 < x$

(9) $|3-x| \geqq 4$

$3-x \leqq -4, 4 \leqq 3-x$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (3) (c=4 のとき)**」より)

$-x \leqq -7, 1 \leqq -x$

$x \geqq 7, \ -1 \geqq x$

$x \leqq -1, 7 \leqq x$

(10) $|x-2| + 3 \geqq 8$

$|x-2| \geqq 5$

$x-2 \leqq -5, 5 \leqq x-2$ ($\because$「**定理 1.1.29 絶対値と方程式・不等式 (3) (c=5 のとき)**」より)

$x \leqq -3, 7 \leqq x$

CHAPTER CHECK 第 1 章

数と式

この章で学んだ内容を振り返り、自分の理解度を確認しよう。

01 多項式の計算

- ☐ 単項式・多項式とその次数・係数について理解している → **定義 1.1.1 定義 1.1.2**
- ☐ 多項式を降べきの順に並べることができる → **定義 1.1.3**
- ☐ 多項式同士の足し算・引き算を筆算を用いて計算できる → **解法 1.1.5**
- ☐ 指数法則を理解している → **定理 1.1.7**
- ☐ 展開・因数分解を行うことができる → **定義 1.1.8 定義 1.1.10**

02 実数

- ☐ 数の分類を覚えている → **定義 1.1.13**
- ☐ 循環小数を分数にすることができる → **解法 1.1.15**
- ☐ 実数の整数部分と小数部分をそれぞれも求めることができる → **定義 1.1.17**
- ☐ 絶対値について理解している → **定義 1.1.18**
- ☐ 数直線上の 2 点の距離を求めることができる → **定理 1.1.19**
- ☐ 平方根の性質を理解している → **定理 1.1.21**
- ☐ 2 重根号を外すことができる → **解法 1.1.23**

03 不等式

- ☐ 不等式を解くことができる → **定義 1.1.26**
- ☐ 連立不等式を解くことができる → **定義 1.1.28**
- ☐ 絶対値を含む方程式・不等式を解くことができる → **定理 1.1.29**

1.2集合と命題

1.2.1集合

定義 1.2.1: 集合

範囲が決まったものの集まりを**集合**といい、その集合を構成する 1 つ 1 つを**要素**という。
a が集合 A の要素であるとき、a は集合 A に**属する**といい、$a \in A$ または $A \ni x$ と表す。
a が集合 A に属さないことを $a \notin A$ と表す。
集合は、以下の 2 つの表し方がある。

- 要素を書き並べ、{} で括る
- 多項式とそこに出てくる変数の条件を「|」で仕切り、{} で括る

また、有限個の要素からなる集合を**有限集合**といい、無限に多くの要素からなる集合を**無限集合**という。

[例] 集合の表し方

(ex_1) A : 10 以下の自然数全体の集合

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

(i) のように数が要素が多い集合は、規則が十分伝わるように書きならべた後に「...」を用いて途中を省略し最後の要素を書く方法もある。

(iii) $A = \{x \mid x \leqq 10$ かつ x は自然数 $\}$

この表現は、『この集合は「|」の左の文字 (今回は x) を集めた集合ですよ』と宣言したうえで、その文字がどのような規則を満たすのかを「|」の右側に書いている。

(iv) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 10$ かつ x は整数 $\}$

⚠ 集合の表現において、「かつ」は単に「,」で記載される場合もある。

(ex_2) B : 正の偶数全体の集合

(i) $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$

この集合のように無限集合の要素を書きならべる場合は、規則が十分伝わるように書きならべた後に「...」を用いて省略する。

(ii) $B = \{x \mid x$ は正の偶数 $\}$

(iii) $X = \{2x \mid x = 1, 2, 3, \ldots\}$

このように「|」の左側に多項式が来ても良い。この例だと、x に $1, 2, 3, \ldots$ と次々代入していくと、$2x$ は $2, 4, 6$ となり B は確かに正の偶数全体の集合となっている。

[例題]$\in$ の使い方の練習

集合 A を 10 以下の素数全体の集合とする。次の数と A の関係を「$\in, \notin$」のどちらかを用いて表せ。

(1) 3
(2) 6
(3) 13

関連問題 ⟶『基本問題集』P16 問題 **1.**

[解答]

(1) 3 は 10 以下の素数であるため、$3 \in A$
(2) 6 は 10 以下ではあるが素数でないため、$6 \notin A$
(3) 13 は素数であるが 10 以下でないため、$13 \notin A$

⚠ $\in, \notin$ は尖ったほうに要素、開いた方に集合を書く。逆にしてはいけないため注意すること。

定義 1.2.2: 部分集合

$x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つとき、A は B の**部分集合**であるといい、$\mathbf{A \subset B}$ または $\mathbf{B \supset A}$ と表す。このとき、A は B に**含まれる**、B は A を**含む**という。
また、部分集合でないことを $A \not\subset B$ と書く。

定義 1.2.3: 集合が等しい

集合 A, B に対して、A と B の要素が全て一致しているとき、
「集合 A, B は**等しい**」といい、$A = B$ と表す。
⚠ $A = B$ は、「$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立する」とも言い換えられる。

[例題] 部分集合・等しい

集合 A を、

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

とする。次の集合の中で、A と部分集合の関係がある集合には「$\subset$」を用いて表し、A と等しい集合には「=」を用いて表せ。

$B = \{x \mid 0 < x \leqq 10 \text{ かつ } x \text{ は整数}\}$
$C = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$
$D = \{y \mid y \text{ は偶数}\}$
$E = \{x \mid 0 < x \leqq 10 \text{ かつ } x \text{ は 4 の倍数}\}$
$F = \{e \mid 0 < e \leqq 10 \text{ かつ } e \text{ は偶数}\}$

関連問題 ⟶『基本問題集』P16 問題 **2.**

[解答]

B, C, D, E, F のうち、A と部分集合の関係にある集合は

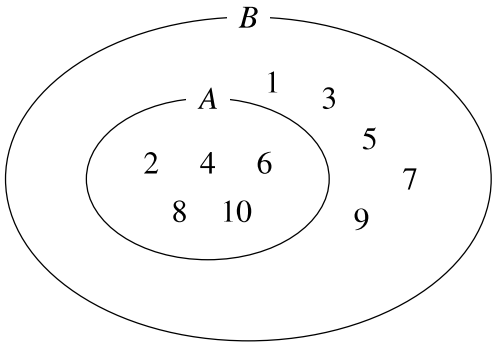
$$\underline{A \subset B, \qquad A \subset D, \qquad E \subset A}$$

であり、A と等しい集合は

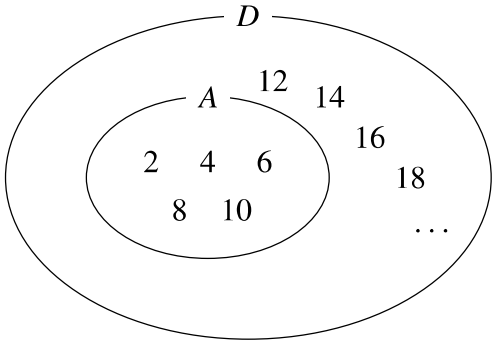
$$\underline{A = F}$$

である。

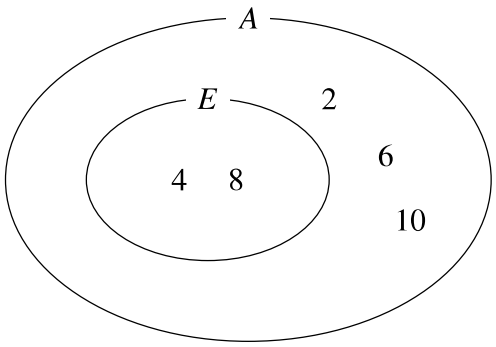
- 集合 B の要素は $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ であり、
  集合 A の要素 $2, 4, 6, 8, 10$ はすべて B に属している。ゆえに$\underline{A \subset B}$



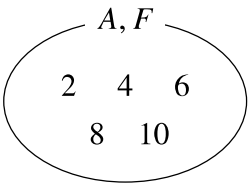
- 集合 C には $-4, -2, 0$ が含まれており、集合 A には $6, 8, 10$ が含まれているので、どちらか一方のすべての要素が他方に含まれることはない。したがって、A と C の間に部分集合の関係はない。
- 集合 D は偶数全体の集合であり、A の要素はすべて偶数である。
  ゆえに$\underline{A \subset D}$



- 集合 E は $E = \{4, 8\}$ であり、その要素はすべて A に含まれる。
  ゆえに$\underline{E \subset A}$



- 集合 F は $F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ であり、$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ である。要素が完全に一致する。ゆえに$\underline{A = F}_{//}$



定義 1.2.4: 空集合

要素を 1 つも持たない集合を**空集合**といい、$\varnothing$ または $\emptyset$ と表す。

定理 1.2.5: 空集合の性質

どんな集合 A も空集合を部分集合にもつ。

$$\varnothing \subset A$$

[例題] 集合の部分集合

次の集合の部分集合を全て求めよ。

(1) $\{A\}$
(2) $\{1, 2\}$
(3) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

関連問題 ⟶『基本問題集』P18 問題 **3.**

[解答]

(1) $\{A\}$ の部分集合は、次の 2 つである。

$$\underline{\varnothing, \{A\}}_{//}$$

(2) $\{1, 2\}$ の部分集合は、次の 4 つである。

$$\underline{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}}_{//}$$

(3) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ の部分集合は、次の 8 つである。

$$\underline{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\gamma, \alpha\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}}$$

※一般に、n 個の要素の部分集合の個数は 2^n 個になることが知られている。

定義 1.2.6: 共通部分・和集合

2 つの集合 A, B に対して、

- A, B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい、$A \cap B$ と表す。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

- A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい、$A \cup B$ と表す。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

[例題] 共通部分・和集合

1. 次の集合 A, B に対して、それぞれ $A \cap B, A \cup B$ を求めよ。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(2) $A = \{1, 2, \alpha, \beta, \gamma\}$
$B = \{1, 2, 3, \alpha, \beta\}$

(3) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 10,\ x \text{ は偶数 }\}$
$B = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 10,\ x \text{ は奇数 }\}$

(4) $A = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \text{ は有理数 }\}$
$B = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \text{ は無理数 }\}$

(5) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$B = \varnothing$

関連問題 ⟶『基本問題集』P18 問題 **4.**

2. 集合 A, B, C をそれぞれ

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

とする。次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B \cap C$

(2) $A \cup B \cup C$

(3) $A \cap (B \cup C)$

(4) $A \cup (B \cap C)$

関連問題 ⟶『基本問題集』P19 問題 **5.**

[解答]

1. (1) $A \cap B = \underline{\{4, 5\}}$

$A \cup B = \underline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$

(2) $A \cap B = \underline{\{1, 2, \alpha, \beta\}}$

$A \cup B = \underline{\{1, 2, 3, \alpha, \beta, \gamma\}}$

(3) $A \cap B = \underline{\varnothing}$

$A \cup B = \underline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$

(4) $A \cap B = \underline{\varnothing}$

$A \cup B = \underline{\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1, x \text{ は実数 }\}}$

(5) $A \cap B = \underline{\varnothing}$

$A \cup B = \underline{\{\alpha, \beta, \gamma\}}$

2. (1) $A \cap B \cap C = \underline{\{6, 8\}}$

(2) $A \cup B \cup C = \underline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$

(3) $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ より、

$A \cap (B \cup C) = \underline{\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}}$

(4) $B \cap C = \{6, 8, 10\}$ より、

$A \cup (B \cap C) = \underline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}}$

※同じ集合を表していれば、表現方法が異なっていても構わない。

定義 1.2.7: 補集合

数学では、議論の際にある軸となる集合を決めてその部分集合の身を議論 s るうことが多い。この軸となる集合を**全体集合**という。ある全体集合 U の部分集合 A に対して、A に属さない U の要素全体の集合を A の**補集合**といい、$\overline{A}$ と表す。

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$$

定理 1.2.8: 補集合の性質

A を全体集合 U の部分集合とする。次が成立する。

(1) $\overline{\varnothing} = U$

(2) $\overline{U} = \varnothing$

(3) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

(4) $A \cup \overline{A} = U$

(5) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

定理 1.2.9: ド・モルガンの法則

次が成立する。

(1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

[例題] 補集合とド・モルガンの法則

全体集合を

$$U = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 10,\ x \text{ は整数 }\}$$

とし、

$$A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

とする。次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$
(2) $\overline{B}$
(3) $\overline{A \cap B}$
(4) $\overline{A \cup B}$
(5) $\overline{\varnothing}$
(6) $\overline{U}$
(7) $A \cap \overline{A}$
(8) $B \cup \overline{B}$
(9) $A \cap \overline{B}$
(10) $A \cup \overline{B}$
(11) $\overline{A} \cap B$
(12) $\overline{A} \cup B$

関連問題 ⟶『基本問題集』P21 問題 **6.**

[解答]

(1) $\overline{A} = \underline{\{1, 4, 7, 10\}}$

(2) $\overline{B} = \underline{\{4, 5, 9, 10\}}$

(3) **「定理 1.2.9 ド・モルガンの法則」**を用いると、

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

となる。(1), (2) より、

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \underline{\{1, 4, 5, 7, 9, 10\}}$$

(別解)

$$A \cap B = \{2, 3, 6, 8\}$$

であるため、その補集合は

$$\overline{A \cap B} = \underline{\{1, 4, 5, 7, 9\}}$$

(4) **「定理 1.2.9 ド・モルガンの法則」**を用いると、

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

となる。(1), (2) より、

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \underline{\{4, 10\}}$$

(別解)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

であるため、その補集合は

$$\overline{A \cup B} = \underline{\{4, 10\}}$$

(5) $\overline{\varnothing} = U = \underline{\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10,\ x \text{ は整数}\}}$ ($\because$「**定理 1.2.8 補集合の性質 (1)**」より)

(6) $\overline{U} = \underline{\varnothing}$ ($\because$「**定理 1.2.8 補集合の性質 (2)**」より)

(7) $A \cap \overline{A} = \underline{\varnothing}$ ($\because$「**定理 1.2.8 補集合の性質 (3)**」より)

(8) $B \cup \overline{B} = U = \underline{\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10,\ x \text{ は整数}\}}$ ($\because$「**定理 1.2.8 補集合の性質 (4)**」より)

(9) $A \cap \overline{B} = \underline{\{5, 9\}}$

(10) $A \cup \overline{B} = \underline{\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}}$

(11) $\overline{A} \cap B = \underline{\{1, 7\}}$

(12) $\overline{A} \cup B = \underline{\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}}$

1.2.2命題

定義 1.2.10: 命題

正しいか、正しくないかがはっきりわかる文章を**命題**という。
命題が正しいとき、その命題は**真**であるという。
命題が間違っているとき、その命題は**偽**であるという。

[例題] 命題の真偽

以下の命題の真偽を答えよ。

(1) x が自然数なら整数である。

(2) x を実数とするとき、$x^2 = 4$ なら $x = 2$ である。

(3) ひし形は平行四辺形である。

関連問題 ⟶『基本問題集』P21 問題 **1.**

[解答]

(1) 真
$\because$「**定義 1.1.13 数の分類**」より、整数は自然数と 0 と負の数の総称であるため。

(2) 偽

$\because x$ が実数なので、$x^2 = 4$ を解くと $x = \pm 2$ となり、$x = 2$ だけでは足りないため。

(3) 真

$\because$ ひし形は 2 組の対角がそれぞれ等しいため平行四辺形である。

定義 1.2.11: 条件

文字を含んだ文や式について、文字のとる値によって真偽が変わるものを、その文字に関する**条件**という。

定義 1.2.12: ならば

条件 p, q とする。命題「p **ならば** q」を「$p \Rightarrow q$」とも書き、p をこの命題の**仮定**、q をこの命題の**結論**という。

また、命題「p ならば q かつ p ならば q」を「$p \Leftrightarrow q$」と書く。

定理 1.2.13: ならばと部分集合

p, q を命題とし、p を満たすものの集合を P、q を満たすものの集合を Q とする。

このとき、次が成立する。

「$p \Rightarrow q$」が真であることと「$P \subset Q$」が成立することは同じである。

「$p \Leftrightarrow q$」が真であることと「$P = Q$」が成立することは同じである。

[例題] ならばを含む命題の真偽

以下の命題の真偽を答えよ。

(1) $x \leqq 5$ ならば $x \leqq 8$

(2) x が整数ならば x は実数

(3) $x \leqq -1$ ならば $x \geqq -3$

(4) $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ならば $x \in \{\alpha, \beta, \theta\}$

(5) $x \in \{b, c, e\}$ ならば $x \in \{a, b, c, d, e\}$

関連問題 ⟶『基本問題集』P22 問題 2.

[解答]

(1) $x \leqq 5$ を満たすものの集合は $\{x \mid x \leqq 5\}$

$x \leqq 8$ を満たすものの集合は $\{x \mid x \leqq 8\}$

であり、

$$\{x \mid x \leqq 5\} \subset \{x \mid x \leqq 8\}$$

が成立するため、**「定理 1.2.13 ならばと部分集合」**より、

「$x \leqq 5$ ならば $x \leqq 8$」は真

(2)「x は整数」を満たすものの集合は $\{x \mid x$ は整数 $\}$

「x は実数」を満たすものの集合は $\{x \mid x \text{ は実数}\}$

であり、

$$\{x \mid x \text{ は整数}\} \subset \{x \mid x \text{ は実数}\}$$

が成立するため、**「定理 1.2.13 ならばと部分集合」**より、

「x が整数ならば x は実数」は真

(3) $x \leqq -1$ を満たすものの集合は $\{x \mid x \leqq -1\}$

$x \geqq -3$ を満たすものの集合は $\{x \mid x \geqq -3\}$

であり、

$$\{x \mid x \leqq -1\} \not\subset \{x \mid x \geqq -3\}$$

が成立するため、**「定理 1.2.13 ならばと部分集合」**より、

「x が整数ならば x は実数」は偽

(4) $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ を満たすものの集合は $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

$x \in \{\alpha, \beta, \theta\}$ を満たすものの集合は $\{\alpha, \beta, \theta\}$

であり、

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \not\subset \{\alpha, \beta, \theta\}$$

が成立するため、**「定理 1.2.13 ならばと部分集合」**より、

「$x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ならば $x \in \{\alpha, \beta, \theta\}$」は偽

(5) $x \in \{b, c, e\}$ を満たすものの集合は $\{b, c, e\}$

$x \in \{a, b, c, d, e\}$ を満たすものの集合は $\{a, b, c, d, e\}$

であり、

$$\{b, c, e\} \subset \{a, b, c, d, e\}$$

が成立するため、**「定理 1.2.13 ならばと部分集合」**より、

「$x \in \{b, c, e\}$ ならば $x \in \{a, b, c, d, e\}$」は真

定義 1.2.14: 反例

偽である命題「$p \Rightarrow q$」において、仮定 p を満たすが、結論 q を満たさないものを、この命題の**反例**という。つまり。$P \cap \overline{Q}$ の要素が反例である。

解法 1.2.15: 命題が偽であることの証明

一般に、命題が偽であることを証明するには、その命題の反例を一つ挙げれば良い。

[例題] 命題が偽であることの証明

次の命題が偽であることを証明せよ。

(1) x は 2 の倍数である $\Rightarrow$ x は 4 の倍数である

(2) $x \in \{$ い, ろ, は $\} \Rightarrow x \in \{$ あ, い, う $\}$

(3) x は整数である $\Rightarrow$ x は自然数である

[解答]

(1) **「解法 1.2.15 命題が偽であることの証明」**より、反例を一つ上げればよい。
$x = 2$ は 2 の倍数であるが、4 の倍数でないため、この命題の反例になる。

(2) **「解法 1.2.15 命題が偽であることの証明」**より、反例を一つ上げればよい。
「$x =$ ろ」は $x \in \{$ い, ろ, は $\}$ を満たしているが、$x \in \{$ あ, い, う $\}$ を満たしていないため、この命題の反例になる。

(3) **「解法 1.2.15 命題が偽であることの証明」**より、反例を一つ上げればよい。
$x = -1$ は整数であるが、自然数でないため、この命題の反例になる。

⚠ 反例は上に書いたもの以外にも存在しているため、他の反例でも良い。

定義 1.2.16: 十分条件・必要条件

2 つの条件 p, q に対して、命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき、

- p は q であるための**十分条件**である。
- q は p であるための**必要条件**である。

という。
また、「$p \Leftrightarrow q$」が真であるとき、

- p は q であるための**必要十分条件**である。
- q は p であるための**必要十分条件**である。

という。このとき、p と q は互いに**同値**ともいう。

[例題] 十分条件・必要条件

次の空欄に入る言葉を語群から選べ。

(1) $x = 3$ は $x^2 = 9$ であるための ☐

(2) x が整数であることは x が自然数であるための ☐

(3) $x \in \{a, b, c\}$ は $x \in \{a, b, c, d, e\}$ であるための ☐

(4) $1 < x < 5$ は $2 < x < 3$ であるための ☐

(5) $x^2 = 3$ は $x = \pm\sqrt{3}$ であるための ☐

[語群]

(1) 十分条件
(2) 必要条件
(3) 十分必要条件

[解答]

(1) 命題「$x=3$ ならば $x^2=9$」が真であるため、 $x=3$ は $x^2=9$ であるための十分条件

(2) 命題「x が自然数なら x は整数」が真であるため、x が整数であることは x が自然数であるための必要条件

(3) 命題「$x \in \{a,b,c\}$ ならば $x \in \{a,b,c,d,e\}$」が真であるため、$x \in \{a,b,c\}$ は $x \in \{a,b,c,d,e\}$ であるための十分条件

(4) 命題「$2<x<3$ ならば $1<x<5$」が真であるため、$1<x<5$ は $2<x<3$ であるための必要条件

(5) 命題「$x^2=3$ ならば $x=\pm\sqrt{3}$」が真であり、命題「$x=\pm\sqrt{3}$ ならば $x^2=3$」も真であるため、 $x^2=3$ は $x=\pm\sqrt{3}$ であるための必要十分条件

定義 1.2.17: 条件の否定

条件 p に対して、「p でない」というものまた命題である。これを条件 p の**否定**といい、$\overline{p}$ と表す。

定理 1.2.18: 条件の否定の性質

p を条件とする。次が成立する。

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$$

[例題] 条件の否定

次の命題の否定を述べよ。ただし、各問の文字は実数を全体集合とするものとする。

(1) $x=5$
(2) $x \neq 2$
(3) $a<2$
(4) $x \leqq -9$
(5) $r>-3$
(6) $a \geqq 4$
(7) x は無理数である
(8) x は無理数でない

関連問題 → 『基本問題集』P23 問題 **4.**

[解答]

(1) $x \neq 5$
(2) **「定理 1.2.18 条件の否定の性質」**より、$x \neq 2$ の否定「$\overline{x \neq 2}$」は$x=2$
(3) $a \geqq 2$
(4) $x>-9$
(5) $r \leqq -3$
(6) $x<4$
(7) x は有理数である
(8) **「定理 1.2.18 条件の否定の性質」**より、「x は無理数」の否定「x は無理数でないことはない」はx は無理数である

⚠ 上のような解答以外のものもあるが、一般的なものを採用した。

定理 1.2.19: ド・モルガンの法則

p, q を条件とする。次が成立する。

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

[例題] ド・モルガンの法則

次の命題の否定を述べよ。ただし、各問の文字は実数を全体集合とするものとする。

(1) $x < 5$ かつ $7 < x$
(2) $-2 < x < 3$
(3) $x \leqq 3$ または $x \geqq 12$
(4) $-8 < x$ または $x < 5$
(5) x は正の数または負の数

関連問題 → 『基本問題集』P24 問題 **5.**

[解答]

(1) $x \geqq 5$ または $7 \geqq x$
(2) $-2 < x < 3$ は「$-2 < x$ かつ $x < 3$」という意味である。
ゆえに、$-2 < x < 3$ の否定は$-2 \geqq x$ または $x \geqq 3$
(3) $x > 3$ かつ $x < 12$
※ $3 < x < 12$ の方が簡潔で良い。
(4) $-8 \geqq x$ かつ $x \geqq 5$
(5) $x \leqq 0$ かつ $0 \leqq x$
※「$x = 0$」と解答しても良い。

定義 1.2.20: 逆・裏・対偶

命題「$p \Rightarrow q$」に対して、

- 「$q \Rightarrow p$」を「$p \Rightarrow q$ の**逆**」
- 「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を「$p \Rightarrow q$ の**裏**」
- 「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を「$p \Rightarrow q$ の**対偶**」

という。

逆・裏・対偶

次の命題に対して逆・裏・対偶をそれぞれ答えよ。

(1) x が整数 $\Rightarrow$ $3x$ は 3 の倍数

(2) $x < -2$ または $4 < x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 > 0$

(3) 図形 T が二等辺三角形 $\Rightarrow$ T は正三角形

関連問題 → 『基本問題集』P24 問題 **6.**

[解答]

(1) 逆 $\cdots$ x が 3 の倍数 $\Rightarrow$ x は整数

裏 $\cdots$ x が整数でない $\Rightarrow$ $3x$ は 3 の倍数でない

対偶 $\cdots$ $3x$ が 3 の倍数でない $\Rightarrow$ x は整数でない

(2) 逆 $\cdots$ $x^2 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2$ または $4 < x$

裏 $\cdots$ $-2 \leqq x \leqq 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leqq 0$

対偶 $\cdots$ $x^2 + 2x - 8 \leqq 0 \Rightarrow -2 \leqq x \leqq 4$

※ $-2 \leqq x \leqq 4$ は、$-2 \leqq x$ かつ $x \leqq 4$ としても良い。

(3) 逆 $\cdots$ 図形 T が正三角形 $\Rightarrow$ T は二等辺三角形

裏 $\cdots$ 図形 T が二等辺三角形でない $\Rightarrow$ T は正三角形でない

対偶 $\cdots$ 図形 T が正三角形でない $\Rightarrow$ T は二等辺三角形でない

定理 1.2.21: 対偶の性質

命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する。

解法 1.2.22: 背理法・対偶による証明

証明問題において、いくつか有用なテクニックを紹介する。

- **背理法**

  「A を証明せよ」という問題を解く際に、$\overline{A}$ を仮定して矛盾を導くことができたら、この仮定が誤っていたことが分かり、間接的に $\overline{\overline{A}}$ つまり A を証明したことにできる。

  この証明法を**背理法**という。

- **対偶による証明法**

  「定理 1.2.21 対偶の性質」より、$A \Rightarrow B$ と $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ の真偽は一致する。これを用いて、「$A \Rightarrow B$ を証明せよ」という問題を解く際に、$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ を証明しても、間接的に $A \Rightarrow B$ を証明したことになる。

  この証明法を**対偶による証明**という。

※なお、本書の目的である「基本事項の理解」と「背理法・対偶による証明」の相性が悪いため、詳細は『高校数学再攻略テキスト』以降で扱うこととする。

CHAPTER CHECK 第 2 章

集合と命題

この章で学んだ内容を振り返り、自分の理解度を確認しよう。

01 集合

- ☐ 集合と要素の関係を $\in, \notin$ を用いて表すことができる → **定義 1.2.1**
- ☐ 集合と集合の関係を $\subset, =$ を用いて表すことができる → **定義 1.2.2** **定義 1.2.3**
- ☐ 集合の共通部分と和集合を求めることができる → **定義 1.2.6**
- ☐ 集合の補集合を求めることができる → **定義 1.2.7**
- ☐ 補集合の性質を理解している → **定理 1.2.8**
- ☐ ド・モルガンの法則を理解している → **定理 1.2.9**

02 命題

- ☐ 命題の真偽を判定することができる → **定義 1.2.10**
- ☐ 「ならば」を含む命題を集合の関係から真偽を判定できる → **定理 1.2.13**
- ☐ 「○○は□□であるための . . . 」と続く文章に十分条件・必要条件・必要十分条件のいずれかを適切に補うことができる → **定義 1.2.16**
- ☐ ド・モルガンの法則を使うことができる → **定理 1.2.19**
- ☐ 「ならば」を含む命題に対して、その逆・裏・対偶をそれぞれ述べることができる → **定義 1.2.20**

1.3 2 次関数

1.3.1関数

定義 1.3.1: 関数

2 つの変数 x, y があって、x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ 1 つに定まるとき「y は x の**関数**である」という。

関数 $y = f(x)$ において、x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ と書き、$f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**値**という。

関数 $y = f(x)$ において、変数 x のとりうる値の範囲を、この関数の**定義域**という。また、x が定義域全体を動くとき、y がとる値の範囲を、この関数の**値域**という。

関数 $y = f(x)$ の定義域が $a \leqq x \leqq b$ であるときは、以下のように書くことがある。

$$y = f(x) \quad (a \leqq x \leqq b)$$

定義 1.3.2: 座標

平面上に以下のように座標軸を定めると、その平面上の点 P の位置は 2 つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の**座標**といい、座標が (a, b) である点 P を $P(a, b)$ と書く。座標軸の定められた平面を**座標平面**という。

座標軸で分けられた座標平面の 4 つの部分を、それぞれ図のように**第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限**という。

定義 1.3.3: グラフ

関数 $y = f(x)$ を満たすような点 (x, y) すなわち、点 $(x, f(x))$ 全体で作られる図形をこの関数の**グラフ**という。

定理 1.3.4: 関数上の点

次が成立する。

$$\text{点 } (a, b) \text{ が関数 } y = f(x) \text{ のグラフ上にある} \quad \Leftrightarrow \quad b = f(a)$$

定義 1.3.5: 1 次関数

x の 1 次式で表される関数を、x の **1 次関数**という。

一般に定数 a, b を用いて、

$$y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

と表すことができる。

このとき、a を**傾き**、b を $\boldsymbol{y}$ **切片**という。

また、このグラフを単に**直線 $\boldsymbol{y = ax + b}$** といい、この方程式を**直線の方程式**という。

⚠ $y = ax + b$ は直線の方程式であるが、直線の方程式はこの形に限らない。(例えば、$x = 2$ のように y 軸に平行な直線も直線の方程式である。)

定義 1.3.6: 関数の最大値・最小値

関数の値域に最大の値があるとき、これをこの関数の**最大値**という。
関数の値域に最小の値があるとき、これをこの関数の**最小値**という。

1.3.2　2 次関数のグラフ

定義 1.3.7: 2 次関数

x の 2 次式で表される関数を、x の **2 次関数**という。
一般に定数 a, b, c を用いて、

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

と表すことができる。
2 次関数のグラフの形の曲線を**放物線**といい、このグラフを単に**放物線 $y = ax^2 + bx + c$**、この方程式を**放物線の方程式**という。このグラフは線対称であり、この対称の軸を単に**軸**、軸と放物線の交点を**頂点**という。
また、その概形から、
$a > 0$ のとき**下に凸**、$a < 0$ のとき**上に凸**という。

定理 1.3.8: 点の平行移動

点 (a, b) を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ移動した点の座標は、

$$(a + p, b + q)$$

である。

定義 1.3.9: 2 次関数のグラフ

2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを、
x 軸方向に p、y 軸方向に q
だけ平行移動した放物線である。
このとき、
軸：直線 $x = p$
頂点：(p, q)

解法 1.3.10: 平方完成

「定義 1.3.92 次関数のグラフ」より、2 次関数のグラフを書くためには

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

で表された 2 次関数を

$$y = a(x - p)^2 + q$$

の形に書き直さなければならない。この書き直す操作を**平方完成**という。
平方完成は以下の手順で行うことができる。

(1) x^2 の係数で、定数項以外を括る。

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

(2) ( ) の中に、$+\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2}(= 0)$ を加える。(次の手順で因数分解するため)

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

(3) ( ) の中を因数分解する。

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

(4) a を分配し整理する。

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}x\right)^2 - \frac{b^2}{2a^2} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}x\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

※インターネットで「平方完成」と検索をすると、$a = 1$ の場合 ($y = x^2 + bx + c$) における途中式を省いたテクニックなどが紹介されていると思う。著者個人の意見としては、上で示したような計算をこなす中で結果的に途中式を書かなくても計算できるようになった、といった方が学習者として健全であるように思う。

定義 1.3.11: 対称移動

平面上で、図形上の各点を、直線や点に関してそれと対称な位置に移すことを**対称移動**という。

定理 1.3.12: 点の対称移動

点 (a, b) に関して、以下が成立する。

(1) x 軸に関する対称移動した点の座標：$(a, -b)$
(2) y 軸に関する対称移動した点の座標：$(-a, b)$
(3) 原点に関して対称移動した点の座標：$(-a. - b)$

定理 1.3.13: 2 次関数の対象移動

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ に関して、以下が成立する。

(1) x 軸に関する対称移動した関数 (y を $-y$ に置き換える)

$$-y = ax^2 + bx + c$$

(2) y 軸に関する対称移動した関数 (x を $-x$ に置き換える)

$$y = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

(3) 原点に関して対称移動した関数 (x を $-x$ に、y を $-y$ に置き換える)

$$-y = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

1.3.3　2 次方程式と解

定理 1.3.14: 積と方程式の性質

A, B を実数とする。次が成立する。

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ または } B = 0$$

定理 1.3.15: 2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0)$ の解は、$b^2 - 4ac \geqq 0$ のとき、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0 \ \ (a \neq 0)$ の解は、$b'^2 - ac \geqq 0$ のとき、

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

定義 1.3.16: 実数解

方程式における実数の解を、単に**実数解**という。

定理 1.3.17: 2 次関数の解

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ において、$D = b^2 - 4ac$ とする。次が成立する。

- $D > 0$ のとき、2 次方程式は 2 つの異なる実数解をもち、
  グラフは $y = 0$ と異なる 2 点を共有する。
- $D = 0$ のとき、2 次方程式はただ 1 つの実数解をもち、
  グラフは $y = 0$ と 1 点で**接する**。
- $D < 0$ のとき、2 次方程式は実数解をもたず、

グラフは $y = 0$ と点を共有しない。

このとき、D を**判別式**という。
また、$D = 0$ のときのただ 1 つの実数解を**重解**といい、グラフで $y = 0$ と接している点を**接点**という。

索引

第 2 章

あ

い

因数 13
因数分解 13

う

右辺 27
裏 45

え

お

か

解 27,28
ガウス記号 21
仮定 41

き

偽 40
基本対称式 26
逆 45
共通部分 37
距離 23

く

空集合 36

け

係数 8
結論 41

こ

項 9
降べきの順 9
根号 23

さ

左辺 27

し

指数 11
(単項式の) 次数 8
(多項式の) 次数 9
指数法則 11
自然数 17
実数 17
集合 33
十分条件 43
循環小数 17
循環節 19
条件 41
小数部分 21
昇べきの順 9
証明 5
真 40

す

数直線 21

せ

整式 9
整数 17
整数部分 21
絶対値 22

全体集合 38

そ

た

対偶 45
対偶による証明 46
対称式 26
多項式 9
たすき掛け 13

ち

つ

て

定義 5
定数項 9
定理 5
展開 12

と

同値 43
同類項 9
解く 27,28
ド・モルガンの法則 39,45

な

ならば 41

に

ぬ

ね

の

は

背理法 46
反例 42

ひ

必要条件 43
必要十分条件 43
否定 44
等しい 34

ふ

含まれる 34
含む 34
部分集合 34

へ

平方根 23

ほ

補集合 38

ま

み

む

無限集合 33
無限小数 17
無理数 17

め

命題 40

も

や

ゆ

有限集合 33
有限小数 17
有理化 24
有理数 17

よ

要素 33

ら

り

両辺 27

る

累乗 11
ルート 23

れ

ろ

わ

和集合 37

アルファベット

n 次式 9
n 乗 11

数字

2 重根号 25